

Identificación Conjunta de Parámetros y Estados para Sistemas Estocásticos no Lineales y con Retardos

Alumno: M. C. Joel Pérez Padrón

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

División de Estudios de Posgrado

Director de Tesis: Dr. Mikhail V. Basin

23 de junio de 2008

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	3
1.2. Objetivos y Metas	6
1.2.1. Objetivos	6
1.2.2. Metas	6
1.3. Aportaciones	8
1.4. Organización de la Tesis	14
2. Marco Teórico	16
2.1. Sistemas Continuos con Retardo	16
2.1.1. Definiciones y conceptos básicos de los sistemas con retardo	16
2.2. Probabilidad y Procesos Estocásticos	23
2.2.1. Conceptos básicos de probabilidad	23
2.2.2. Conceptos básicos de procesos estocásticos	29
2.3. Filtro de Kalman-Bucy para Sistemas en Tiempo Continuo	32
2.3.1. Conceptos básicos.	32

2.4.	Control Óptimo en Sistemas Lineales	35
2.4.1.	Conceptos básicos	35
2.4.2.	El problema de control óptimo en sistemas lineales	36
2.4.3.	Solución del problema de control óptimo en sistemas lineales	37
3.	Filtrado Óptimo para Sistemas de Estado Polinomial con Ruido Multiplicativo Polinomial	38
3.1.	Problema de Filtrado para Estado Polinomial con Ruido Multiplicativo sobre Observaciones Lineales	38
3.2.	Filtro Óptimo para Estado Polinomial con Ruido Multiplicativo sobre Ob- servaciones Lineales	40
3.2.1.	Filtro Óptimo para Estado Lineal con Ruido Multiplicativo Lineal .	44
3.2.2.	Filtro Óptimo para Estado Bilineal con Ruido Multiplicativo Bilineal	45
3.3.	Ejemplo	47
3.4.	Conclusiones	51
4.	Filtrado Óptimo para Sistemas Polinomiales Medidos Parcialmente con Ruidos Multiplicativos	53
4.1.	Establecimiento del Problema	53
4.2.	Diseño del Filtro Óptimo	56
4.2.1.	Sistemas Bilineales	60
4.3.	Problema de Filtrado Óptimo con el Sensor Cúbico	62
4.4.	Conclusión	65
5.	Filtrado de Estado Óptimo e Identificación de Parámetros para Sis- temas Lineales	67

5.1. Problema de Filtrado para Estado Lineal con Parámetros Desconocidos sobre Observaciones Lineales	67
5.2. Filtro Óptimo e Identificador para Estado Lineal con Parámetros Vectoriales Desconocidos sobre Observaciones Lineales	69
5.3. Ejemplo	72
5.4. Conclusiones	74
6. Filtro Alternativo Óptimo para Sistemas Lineales con Retardo en el Estado	76
6.1. Problema de Filtrado para Sistemas Lineales con Retardo en el Estado . .	76
6.2. Filtro Óptimo para Sistemas Lineales con Retardo en el Estado	78
6.3. Ejemplo	83
6.4. Conclusiones	85
7. Regulador Óptimo para Sistemas Lineales con Múltiples Retardos en el Estado	87
7.1. Planteamiento del Problema de Control Óptimo	87
7.2. Solución al Problema de Control Óptimo	88
7.3. Ejemplo	91
7.4. Apéndice	96
8. Un Regulador Óptimo para Sistemas Lineales con Retardos Múltiples en la Entrada y el Estado	100
8.1. Planteamiento del Problema de Control Óptimo	100
8.2. Solución al Problema de Control Óptimo	101
8.3. Ejemplo	104
8.4. Apéndice	108

9. Conclusiones y Trabajo Futuro	113
9.1. Conclusiones	113
9.2. Trabajos Futuros	113
Referencias Bibliográficas	115

DEDICO ESTE TRABAJO DE TESIS:

A la memoria de mí madre Sra. Irene Padrón Méndez por darme la vida y forjarme el espíritu de superación y perseverancia.

A la memoria de mí padre Sr. José Pérez Ríos por enseñarme a ver lo positivo de la vida.

Mis hijos: Joey, José Alfredo y Joycee Melanne

Mi esposa: Yolanda Flores Hernández

Mis hermanos: Genoveva, José Paz, José Feliciano, Francisco Javier y Rubén

Mi suegra: Alfreda Hernández Hernández

Mis cuñados: Luis Erasmo Pozos Vázquez y Angel Flores Hernandez.

Mis cuñadas: Arcelia, María Lidia, Adriana, Flor, Laura y Esthela.

Mis compades: Diego Cruz e Izabet Cerda, y también Carlos Orozco y Azucena Olguin.

Todos mis sobrinos(as), primos(as), Tíos(as).

Agradecimientos

Deseo agradecer de una manera muy especial a mi asesor de tesis:

Dr. Mikhail V. Basin por su paciencia, orientación, disposición para la terminación de mi tesis Doctoral.

También deseo agradecer al Dr. José Paz Pérez Padrón por su apoyo y su tiempo durante mis estudios de Doctorado.

Agradezco de una manera especial a la profesora Lic. Ma. del Pilar Goñi Vélez, M. T., por ser una persona amigable y muy querida por mi hermano Paz y por mi, Joel, y preocuparse hacia mi familia.

Al igual agradezco a la M. A. Carmen de la Fuente, M. A. Patricia Martínez, Dr. Rubén Morones, por su valiosa ayuda en mis tres años en el Posgrado de Ingeniería Física Industrial de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Autónoma de Nuevo León.

A mis mejores vecinos Javier García, su esposa Ma. del Pilar Ortuño y a sus hijas Vicky y Patsy.

A todos los maestros de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Autónoma de Nuevo León.

Al Consejo Nacional de Ciencia Y Tecnología

Que Dios los bendiga a todos.

Resumen

Esta tesis presenta los resultados principales siguientes:

El desarrollo de los algoritmos óptimos y robustos de la identificación simultánea de parámetros y estados para varios sistemas estocásticos que se encuentran en el mundo real: no lineales, con retardos, discontinuos. La investigación orientada a la solución de esta clase de problemas pretende elaborar un método seguro para proporcionar la información confiable sobre los estados de sistemas bajo influencia de ruidos blancos, con parámetros desconocidos, en una situación de observaciones incompletas, aun en presencia de disturbios determinísticos. Las líneas auxiliares de esta tesis desarrollan el filtrado óptimo para sistemas estocásticos polinomiales con ruidos multiplicativos y medidos parcialmente, identificación de parámetros para sistemas lineales y filtro alternativo con retardo en el estado. Finalmente, se presenta un controlador óptimo para sistemas lineales con múltiples retardos en el estado y/o en la entrada, afectados por ruido blanco Gaussiano. Los resultados son probados teóricamente y verificados mediante simulación numérica.

Capítulo 1

Introducción

El problema de identificación simultanea de parámetros y estados para sistemas estocásticos con parámetros desconocidos ha recibido un tratamiento sistemático a partir de los años 70 [1], aplicando principalmente el principio de máxima verosimilitud (likelihood) (ver por ejemplo, [2]). Sin embargo, el uso del principio de máxima verosimilitud ha revelado ciertas limitaciones en los resultados finales obtenidos: (a) los parámetros desconocidos se asumen constantes para evitar las complicaciones relacionadas al problema general de optimización, y (b) no se puede obtener ecuaciones directas dinámicas (o en diferencias) para la dinámica de los estados y parámetros óptimos en la "situación general", sin poner las restricciones especiales a la estructura del sistema. Otros métodos relevantes son los algoritmos de la identificación de parámetros sin la estimación simultánea de estados. Entonces, se ve claramente que a pesar de un número significativo de los trabajos previos en el área de la identificación simultánea de parámetros y estados, todavía no existe el estimador de estados e identificador de parámetros óptimo en la forma de un sistema cerrado de un número finito de ecuaciones diferenciales ordinarias, aun para sistemas estocásticos lineales.

Los requerimientos debidos a las fuertes restricciones en las condiciones de operación, costo, exactitud, durabilidad y confiabilidad en los procesos y sistemas en general, han propiciado el desarrollo de sistemas de control cada vez mas versátiles y complejos. Lo sofisticado de las operaciones en los procesos industriales, militares, sistemas de navegación terrestre, aérea, marítima y espacial, sistemas informáticos y de comunicación, son ejemplos que lo confirman.

En sentido estricto, todo sistema de control presenta retardos, porque las tareas que efectúa no son instantáneas. En muchos casos, el retardo es introducido al sistema con el objetivo de mejorar su desempeño. Sistemas de mezclado de fluidos con concentración variable, procesos de rolado en frío en láminas de acero en la industria siderúrgica, transmisión de señales de comunicación en sistemas satelitales y vehículos espaciales, control de tráfico urbano, modelos de producción de torque en el diseño de máquinas de combustión interna, son ejemplos de esta clase de sistemas ([3, 4, 5, 6 y 7]).

Adicionalmente, los sistemas de control son afectados por perturbaciones externas, la mayoría de ellas de naturaleza aleatoria que provocan cambios en su desempeño y que en casos particulares pueden conducirlo a situaciones de funcionamiento no deseable, siendo necesario conocer el comportamiento estadístico de las variables del sistema. Sistemas de posicionamiento global, de comunicación satelital, redes eléctricas de todo tamaño, problemas que implican líneas de espera, son ejemplos de esta clase de sistemas ([8, 9, 10, 11, 12 y 13]).

Un sistema no lineal puede tener un complicado comportamiento de estado estable que no es equilibrio, oscilación periódica o casi oscilación periódica. Tal comportamiento es usualmente referido como caos. Algunos de esos movimientos caóticos son aleatorios, a pesar de la naturaleza determinística del sistema. Esto no es raro para dos o más modelos de comportamiento al ser representados por el mismo sistema no lineal. Un sistema no

forzado puede tener más que un período límite. Un sistema forzado con excitación puede presentar armónico, subarmónico o más complicados comportamientos de estado estable dependiendo de la amplitud y frecuencia de la entrada. Esto puede aún presentar un salto de discontinuidad en el modo del comportamiento cuando la amplitud o frecuencia de la excitación es cambiada suavemente. Diseño de tales algoritmos permitirá organizar correctamente el funcionamiento del sistema en las condiciones extraordinarias.

1.1. Antecedentes

1.- Aunque la solución óptima general al problema de filtrado para estados no lineales y ecuaciones de observación mezcladas con ruido blanco Gaussiano dada por la ecuación de Kushner, para la densidad condicional de un estado no observado con respecto a observaciones [14], hay muy pocos ejemplos conocidos de sistemas no lineales donde la ecuación de Kushner puede ser reducida a un sistema cerrado dimensional finito de ecuaciones de filtrado para un cierto número de momentos condicionales inferiores. El más famoso resultado, el filtro de Kalman-Bucy [15], relacionado a el caso de estados y ecuaciones de observación lineales, donde sólo dos momentos, el estimado en sí mismo y su varianza, forman un sistema cerrado de ecuaciones de filtrado. De cualquier modo, el filtro no lineal óptimo de dimensión finita puede ser obtenido en algunos otros casos, si, por ejemplo, el vector de estado puede tomar sólo un número finito de valores admisibles [16] o si la ecuación de observación es lineal y el término "drift", en la ecuación de estado satisface la ecuación de Riccati $df/dx + f^2 = x^2$ (ver [17]). La clasificación completa de la "situación general", (esto significa que no hay suposición especial sobre la estructura de las ecuaciones de estado y la observación y las condiciones iniciales), donde el filtro no lineal óptimo de dimensión finita existe, es dado en [18]. También existe una bibliografía considerable sobre

sistemas de filtrado robusto para la "situación general" (ver, [19, 20, 21, 22]). Aparte de la "situación general", los filtros óptimos de dimensión finita, que han sido recientemente diseñados ([23, 24]) para ciertas clases de sistemas de estados polinomiales con condiciones iniciales Gaussianas sobre observaciones lineales con una matriz de observación invertible.

2.- El problema de la estimación simultánea óptima de estados e identificación de parámetros para sistemas estocásticos con parámetros desconocidos ha recibido tratamiento sistemático comenzando del artículo [1]. El resultado óptimo fue obtenido en [1] para un sistema lineal en el tiempo discreto con parámetros desconocidos constantes dentro de un horizonte finito de filtrado, usando el principio de máxima verosimilitud (ver, [2]), en vista de un conjunto finito de valores de estados y parámetros en instantes de tiempo. La aplicación del concepto de máxima verosimilitud se realizó también para sistemas lineales en el tiempo discreto [25] y sistemas lineales en el tiempo continuo en [26].

Sin embargo, el uso del principio de máxima verosimilitud revela ciertas limitaciones en el resultado final: a) los parámetros desconocidos son asumidos constantes para evitar complicaciones en el problema de optimización generado y b) las ecuaciones dinámicas (en diferencias) directas no pueden ser obtenidas para seguir la dinámica del estado óptimo y los parámetros estimados en la "situación general", sin imponer suposiciones especiales en la estructura del sistema. Otros enfoques son presentados por los métodos de identificación óptima de parámetros sin la estimación simultánea de estado, tal como diseñado en [27, 28, 29], las cuales son también aplicables a sistemas estocásticos no lineales. Por otro lado, los algoritmos de filtrado robusto para sistemas estocásticos no lineales con entradas determinísticas desconocidas son desarrollados en [19, 30, 31]. Otro enfoque, basado sobre la optimización de filtros H_∞ robustos, han sido recientemente introducido en [19, 30, 31], para sistemas estocásticos lineales con incertidumbres acotadas en los coeficientes. El comentario general es que, a pesar de un número significativo de trabajos en el área de

identificación simultánea de parámetros y estimación de estados, el filtro óptimo y el identificador óptimo de parámetros han sido obtenidos en forma de un sistema cerrado de dimensión finita de ecuaciones diferenciales ordinarias estocásticas no han sido obtenidos todavía aun para sistemas lineales con retardo.

3.- El problema de filtrado óptimo para sistemas de estado lineal y observaciones sin retardo fué resuelto en los 60's [15], y esta solución en forma cerrada es conocida como el filtro de Kalman-Bucy. De cualquier modo, el problema de filtrado óptimo referido para estados lineales con retardo no ha sido resuelto en una forma cerrada, como una solución de un sistema cerrado de un número finito de ecuaciones diferenciales ordinarias para cualquier horizonte de filtrado finito. El problema de filtrado óptimo para sistemas con retardo en el tiempo en sí mismo, no ha recibido, como tal, mucha atención, como su contraparte del control, ya que la mayoría de las investigaciones se han concentrado sobre los problemas de filtrado con retardos de observación (los artículos [32, 33, 34, 35] pueden ser mencionados para hacer una referencia). Unos pocos casos particulares, los problemas de filtrado óptimo para sistemas lineales con retardo de estado y/o retardos de observación múltiples, han sido recientemente resueltos en [36, 37, 38]. El filtro óptimo para sistemas lineales con retardo de estado, deducido en [36], tiene resuelto el mismo problema de filtrado como el presente capítulo. Sin embargo, ésa solución no es libre de desventajas computacionales: esto incluye un número variable de ecuaciones de covarianza, el cual crece ilimitadamente cuando el horizonte de filtrado tiende a infinito, y la estructura de las ecuaciones de covarianza también varía con el número. Existe una considerable bibliografía relacionada al control robusto y problemas de filtrado para sistemas con retardo de tiempo (tal como [19, 20, 21, 22, 30, 31, 39, 40, 41, 42]). La revisión amplia de teoría y algoritmos para sistemas con retardo de tiempo es dada en [41, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49].

4.- Aunque el problema de control óptimo (regulador) para sistemas lineales con re-

tardos fué resuelto en los 60's (ver [50, 51]), el problema de control óptimo para sistemas lineales sin retardos sigue siendo abierto, dependiendo sobre el tipo de retardo, sistemas de ecuaciones específicas, criterios, etc. Varios problemas de control óptimo lineal-cuadrático han sido estudiados en [52, 53, 54, 55]. Un comentario detallado sobre el estado moderno de la teoría de control para sistemas con retardo de tiempo es dado en [56, 57, 58, 59]. Muy amplio análisis de teoría y algoritmos para sistemas con retardo en el tiempo puede ser encontrado en [42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 60, 61].

1.2. Objetivos y Metas

1.2.1. Objetivos

Desarrollar, probar teóricamente y verificar numéricamente los algoritmos para:

- 1.- Estimación óptima de estados de sistemas polinomiales estocásticos con ruidos multiplicativos y con retardos.
- 2.- Identificación conjunta óptima de parámetros y estados para sistemas estocásticos lineales.
- 3.- Control óptimo para sistemas lineales con retardos múltiples en el estado y/o en la entrada de control.

1.2.2. Metas

De acuerdo con los objetivos, se planean las siguientes metas:

- 1.- Desarrollar, probar teóricamente y verificar numéricamente los algoritmos de filtrado óptimo para sistemas polinomiales con observaciones lineales y ruidos multiplicativos dependientes del estado del sistema.

2.- Desarrollar, probar teóricamente y verificar numéricamente los algoritmos de filtrado óptimo para sistemas polinomiales con ruidos multiplicativos dependientes del estado del sistema para el caso de observaciones lineales incompletas con la parte polinomial del estado completamente medible.

3.- Desarrollar, probar teóricamente y verificar numéricamente los algoritmos de filtrado óptimo para sistemas polinomiales con retardos en las observaciones lineales.

4.- En base a los algoritmos desarrollados en el inciso 1, desarrollar, probar teóricamente y verificar numéricamente los algoritmos de la identificación óptima conjunta de parámetros y estados en sistemas estocásticos lineales, reduciendo este problema al problema previamente resuelto.

5.- En base a los algoritmos desarrollados en el inciso 1, desarrollar, probar teóricamente y verificar numéricamente los algoritmos de filtrado óptimo para sistemas con estados lineales en presencia de observaciones polinomiales, reduciendo este problema al problema previamente resuelto.

6.- Desarrollar, probar teóricamente y verificar numéricamente los algoritmos de filtrado óptimo para sistemas lineales con retardos en el estado, tales que el sistema resultante de ecuaciones de filtrado óptimo contiene un número finito de ecuaciones.

7.- Desarrollar, probar teóricamente y verificar numéricamente los algoritmos de control óptimo para sistemas lineales con retardos múltiples en el estado.

8.- Desarrollar, probar teóricamente y verificar numéricamente los algoritmos de control óptimo para sistemas lineales con retardos múltiples en el estado y en la entrada de control.

1.3. Aportaciones

Filtrado Óptimo para Sistemas de Estado Polinomial con Ruido Multiplicativo Polinomial

Este capítulo presenta el filtro óptimo de dimensión finita para sistema de estados polinomiales con ruidos multiplicativos polinomiales sobre observaciones lineales con una matriz de observación invertible, por lo tanto generalizando el resultado de ([23, 24, 62]) obtenido para un sistema de estado polinomial con ruido independiente de estado.

El problema de filtrado óptimo es tratado procediendo de la expresión general para el diferencial estocástico de Ito del estimado óptimo y la varianza del error [63]. Como el primer resultado, las diferenciales de Ito se obtienen para el estimado óptimo y la varianza del error correspondientes al problema de filtrado establecido. Entonces, es demostrado que un sistema cerrado dimensional finito de las ecuaciones de filtrado óptimo con respecto a un número finito de variables de filtrado puede ser obtenido para una ecuación de estado polinomial con ruido multiplicativo polinomial y observaciones lineales con una matriz de observación invertible. En este caso, el procedimiento correspondiente para calcular las ecuaciones de filtrado óptimo es establecido. Finalmente, el sistema cerrado de las ecuaciones de filtrado óptimo con respecto a dos variables, el estimado óptimo y la varianza del error, es obtenido en la forma explícita para los casos de una ecuación de estado lineal con ruido multiplicativo lineal y una ecuación de estado bilineal con ruido multiplicativo bilineal.

En el ejemplo ilustrativo, el desempeño del filtro óptimo calculado es verificado para un estado cuadrático con un ruido multiplicativo cuadrático sobre observaciones lineales contra el filtro óptimo para un estado cuadrático con un ruido independiente de estado y un filtro de Kalman-Bucy extendido convencional. Los resultados de simulación muestran ventaja definitiva del filtro óptimo calculado en relación a cercanía del estimado al valor

de estado real. Por otra parte, esto puede ser visto que el error de estimación producido por el filtro óptimo rápidamente alcanza y entonces mantiene el valor medio cero también en una vecindad cercana al momento de tiempo asintótico, aunque el sistema de estado en sí mismo es inestable y los componentes cuadráticos tienden a infinito para un tiempo finito. Por el contrario, los errores de estimación dados por los otros dos filtros aplicados divergen a infinito cerca al momento de tiempo asintótico.

Los resultados de este capítulo son publicados en:

- a.- International Journal of Robust and Nonlinear Control, Vol. 16, no. 6, pp. 303-314.
- b.- Proceedings of the 2006 American Control Conference (Minneapolis, MN, June 14-16, 2006), pp. 1607-1612.

Filtrado Óptimo para Sistemas Polinomiales Medidos Parcialmente con Ruidos Multiplicativos

Este capítulo presenta el filtro óptimo de dimensión finita para sistemas polinomiales con ruido multiplicativo polinomial, donde la matriz de observación puede no ser invertible y sólo los componentes no lineales del sistema de estado son tomados para ser completamente medidos, considerando que la parte lineal del estado puede ser parcialmente medido o aun no medido completamente, así generalizando el resultado de ([23, 24, 62]) obtenido para sistemas de estado polinomial con ruido independiente de estado. Diseñando el filtro óptimo para sistemas polinomiales con ruido multiplicativo polinomial sobre observaciones con una matriz de observación no invertible, presenta una ventaja significativa en la teoría de filtrado y en la práctica, ya que esto permite atacar a los problemas de filtrado óptimo para estados polinomiales con no linealidades polinomiales de observación, tal como el problema del sensor cúbico óptimo (ver [64]). El problema de filtrado óptimo es tratado procediendo de la expresión general para la diferencial estocástica de Ito del estimado óptimo y la varianza del error [63]. Como el primer resultado, las diferenciales de Ito

para el estimado óptimo y la varianza del error correspondientes al problema de filtrado establecido son derivadas. Es entonces demostrado que un sistema cerrado de dimensión finita de las ecuaciones de filtrado óptimo con respecto a un número finito de variables de filtrado puede ser obtenido si la ecuación de estado es polinomial con ruido multiplicativo polinomial, las observaciones son lineales, y solo los componentes no lineales del estado son tomadas para ser completamente medidas. En este caso, el procedimiento correspondiente para diseñar las ecuaciones de filtrado óptimo es establecido.

Finalmente, el sistema cerrado de las ecuaciones de filtrado óptimo con respecto a dos variables, el estimado óptimo y la varianza del error, es desarrollado en la forma explícita para el caso particular de una ecuación de estado bilineal con ruido multiplicativo bilineal.

Como un ejemplo ilustrativo, el filtro óptimo diseñado es aplicado para la solución del problema de filtrado óptimo con el sensor cúbico, establecido en [64], asumiendo una condición inicial Gaussiana para el estado extendido. El filtro resultante produce una segura y rápida convergencia del estimado, a pesar de una diferencia significativa en las condiciones iniciales entre el estado y el estimado y mismas observaciones ruidosas, en la situación donde el estado no medible en sí mismo es un proceso de Wiener y el filtro de Kalman extendido (EKF) falla en la aproximación.

Los resultados de este capítulo son publicados en:

a.- Proceedings of the 45th Conference on Decision and Control (San Diego, CA, December 13-15, 2005), pp. 4169-4174.

Filtrado de Estado Óptimo e Identificación de Parámetros para Sistemas Lineales

Este capítulo presenta el filtro óptimo y el identificador óptimo de parámetros para sistemas estocásticos lineales con parámetros multiplicativos y aditivos desconocidos sobre observaciones lineales con una matriz de observación invertible, donde los parámetros

desconocidos son considerados procesos de Wiener. El problema de filtrado es formalizado considerando los parámetros desconocidos como sistemas de estado adicionales satisfaciendo la ecuación lineal estocástica de Ito con "drift cero y difusión unitaria". Por lo tanto, el problema es reducido al problema de filtrado para sistemas de estado polinomial (bilineal) con parte lineal medida parcialmente sobre observaciones lineales, para la cual la solución ha sido obtenida recientemente en el capítulo 4 y basada sobre resultados previos en el filtrado polinomial (ver [23, 24]). Esto presenta el algoritmo óptimo para estimación de estado e identificación de parámetros simultáneas en sistemas lineales con parámetros aditivos y multiplicativos desconocidos sobre observaciones lineales.

En el ejemplo ilustrativo, el desempeño del filtro óptimo diseñado es verificado para un sistema lineal con un parámetro multiplicativo desconocido sobre observaciones lineales. Las simulaciones son conducidas para ambos valores del parámetro, negativo y positivo, por lo tanto considerando sistemas lineales estables e inestables. Los resultados de simulación muestran confianza en el desempeño del filtro: en ambos casos, el estado estimado converge al estado real y el parámetro estimado converge al valor del parámetro real rápidamente.

Los resultados de este capítulo son publicados en:

- a.- Proceedings of the 2006 American Control Conference (Minneapolis, MN, June 14-16, 2006), pp. 987-990.
- b.- (2008) Optimal state filtering and parameter identification for linear systems, Optimal Control Applications and Methods, DOI: 10.1002/oca.826.

Filtro Alternativo Óptimo para Sistemas Lineales con Retardo en el Estado

En este capítulo, el problema de filtrado óptimo para sistemas lineales con retardo de estado sobre observaciones lineales es tratado usando el estimado óptimo para la matriz de transición de estado del momento de tiempo actual para uno retardado. Haciendo eso, el

método empleado parece al predictor de Smith [65] (ver [66] para más investigación sobre esta semejanza). Como el resultado, el filtro óptimo es derivado en una forma similar al filtro de Kalman-Bucy tradicional, i.e., consiste de sólo dos ecuaciones, para el estimado óptimo y la varianza del error. Esto presenta una ventaja significativa en comparación al filtro óptimo obtenido previamente [36], que consiste de un número variable de ecuaciones de covarianza, el cuál es especificado por la razón entre el horizonte de filtrado actual y el valor del retardo en la ecuación de estado y crece ilimitadamente cuando el horizonte de filtrado tiende a infinito.

Note que la aproximación basada sobre la estimación óptima de la matriz de transición de estado será aplicable para cualquier sistema de estado y ecuaciones de observación con retardos de tiempo, donde el estimado óptimo de la matriz de transición de estado es no correlacionada con la varianza del error, incluyendo ciertas clases de sistemas no lineales.

Finalmente, el desempeño del filtro óptimo alternativo diseñado para sistemas lineales con retardo de estado es comparado en el ejemplo ilustrativo con el desempeño del filtro óptimo obtenido en [36]. Los resultados de simulación muestran una insignificante diferencia en valores del estimado obtenido para ambos filtros.

Los resultados de este capítulo son publicados en:

a.- International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, Vol. 20, no. 10, pp. 509-517.

b.- Proceedings of the 45th Conference on Decision and Control (San Diego, CA, December 13-15, 2005), pp.4752-4756.

Un Regulador Óptimo para Sistemas Lineales con Retardos Múltiples en el Estado y/0 en la Entrada

Estos capítulos se concentran sobre la solución del problema de control óptimo para un sistema lineal con múltiples retardos de estado y de entrada y un criterio cuadrático. El

problema original es reducido a un problema de regulador lineal cuadrático convencional (LQR) para sistemas sin retardo, usando las matrices de transición de estado y de control del momento de tiempo actual a uno retardado para el sistema con retardos de tiempo original. Haciéndolo así, el método empleado cercanamente se parece al bien conocido predicador de Smith [65] (ver [66] para más investigación sobre esta semejanza). Ya que las matrices de transición de estado, tomadas al momento de tiempo actual, son conocidas como funciones dependientes de tiempo, la solución es encontrada usando el regulador lineal cuadrático óptimo [50]. Como un resultado, la solución al problema de control óptimo original es obtenida en forma cerrada, i.e., esta es representada como una ley de control de retroalimentación lineal, en la cual, la matriz de ganancia satisface una ecuación diferencial ordinaria de Riccati. La última no contiene argumentos avanzados de tiempo, pero sus coeficientes dependen de las variables de estado. El regulador óptimo obtenido, representa un avance con respecto a los resultados de optimalidad general para sistemas con retardo de tiempo (tal como dados en [45, 46, 47, 53]), ya que esto es realizable usando solo dos ecuaciones diferenciales con retardo unidas: una para el estado y otra para la matriz de ganancia. Tomando en cuenta que el espacio de estado de un sistema retardado es de dimensión infinita [47], esto parece ser una ventaja significativa. Ya que la ecuación de Riccati obtenida no contiene argumentos avanzados de tiempo, esta puede resolverse numéricamente usando métodos simples, tal como, "shooting", el cuál consiste en variar las condiciones iniciales hasta que una final es satisfecha.

Finalmente, el desempeño del control óptimo obtenido para un sistema lineal con retardos de estado y de entrada múltiples y un criterio cuadrático es verificado en el ejemplo ilustrativo contra el mejor regulador lineal disponible para un sistema lineal sin retardos. Los resultados de simulación muestran una diferencia significativa en los valores de la función de costo en favor del regulador óptimo obtenido. Además, el regulador óptimo

obtenido es comparado a los mejores reguladores lineales basados sobre dos aproximaciones racionales, lineal y cuadrática, del sistema de retardo de tiempo original. En ambos casos, las simulaciones muestran que los reguladores basados en las aproximaciones producen valores no satisfactorios de la función de costo en comparación al regulador óptimo. Además, la aproximación cuadrática produce un incremento en la dimensión del problema, produciendo dificultades computacionales adicionales.

Los resultados de este capítulo son publicados en:

- a.- Optimal Control Applications and Methods, Vol. 28, no. 1, pp.45-57.
- b.- (2007) Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Vol. 14A, no. S2, pp. 279-284.
- c.- Proceedings of the 2007 American Control Conference (New York, NY, July 11-13, 2007), pp. 5625-5630.

1.4. Organización de la Tesis

En el capítulo 2 se presentan los conceptos básicos de los sistemas continuos con retardo, teoría de probabilidad y procesos estocásticos, filtrado y control óptimo.

En el capítulo 3 se presenta el problema de filtrado óptimo para sistemas de estado polinomial con ruido multiplicativo polinomial.

El capítulo 4 trata el problema de filtrado óptimo para sistemas polinomiales medidos parcialmente con ruidos multiplicativos.

En el capítulo 5 se presenta el problema de filtrado de estado óptimo e identificación de parámetros para sistemas lineales.

El capítulo 6 trata el problema del filtro alternativo óptimo para sistemas lineales con retardo en el estado.

El capítulo 7 presenta el regulador óptimo para sistemas lineales con múltiples retardos en el estado.

El capítulo 8 presenta un regulador óptimo para sistemas lineales con retardos múltiples en la entrada y el estado.

El capítulo 9 presenta las conclusiones y el trabajo futuro.

Capítulo 2

Marco Teórico

En este capítulo se presentan los conceptos básicos necesarios para el estudio y análisis de los temas expuestos en los capítulos siguientes. Las fuentes consultadas principales son: para sistemas con retardo ([43, 67, 68]); probabilidad y procesos estocásticos ([69, 70, 71, 72]); filtrado óptimo ([69, 71, 73, 74]); y control óptimo ([75, 76, 77, 78]).

2.1. Sistemas Continuos con Retardo

2.1.1. Definiciones y conceptos básicos de los sistemas con retardo

Una clase de sistemas con retardo se describe por la ecuación

$$\dot{x}(t) = F(x(t), x(t-h)) \quad (2.1)$$

donde $x(t) \in R^n$ es el vector de estados del sistema, $h \in R$ tal que $h > 0$ es el retardo y F es una función continua que satisface la condición de Lipschitz con respecto a sus argumentos.

Definición 1: Una función f definida en $[a, b]$, satisface la condición de Lipschitz en ese intervalo si existe una constante K tal que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq K |x - y| \quad \forall x, y \in [a, b] \quad (2.2)$$

donde K es la constante de Lipschitz. Se dice entonces que f es Lipschitz en la variable x .

Si $D_x f(t, x)$ denota la derivada de f para t fija y $|D_x f(t, x)y| \leq K \quad \forall y \in R^n$, entonces f es Lipschitz con constante de Lipschitz K .

Definición 2: El espacio de estados de un sistema de control continuo con retardo es un espacio vectorial de dimensión infinita. Así, un conjunto de funciones vectoriales de dimensión n en este espacio se define mediante

$$\Sigma = \mathbf{x}(\Theta), \quad t - \Delta \leq \Theta \leq t \quad (2.3)$$

donde Δ es el retardo más grande del sistema.

En el caso general, la ecuación de estado para un sistema de control con retardo se describe por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - h_{x1}), \mathbf{x}(t - h_{x2}), \dots, \mathbf{x}(t - h_{xN}), \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t - h_{u1}), \mathbf{u}(t - h_{u2}), \dots, \mathbf{u}(t - h_{uR}), t) \quad (2.4)$$

donde \mathbf{f} es una función no lineal, $\mathbf{x}(t) \in R^n$ es el vector de estados, $h_{xi} \in R$ son los retardos en el estado tal que $h_{xi} > 0$ con $i = 1, 2, \dots, N$, $\mathbf{x}(t - h_{xN}) \in R^n$ es el vector de estados con retardo, $\mathbf{u}(t) \in R^p$ es el vector de entradas de control, $h_{ui} \in R$ son los retardos en las entradas de control tal que $h_{ui} > 0$ con $i = 1, 2, \dots, R$ y $\mathbf{u}(t - h_{uR}) \in R^p$ es el vector de entradas de control con retardo.

Además, si el vector de salida $\mathbf{y}(t)$ está en función de los vectores de estado y de las

entradas de control, se describe por

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - h_{x1}), \mathbf{x}(t - h_{x2}) \dots \mathbf{x}(t - h_{xN}), \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t - h_{u1}), \mathbf{u}(t - h_{u2}) \dots \mathbf{u}(t - h_{uR}), t) \quad (2.5)$$

en donde \mathbf{g} en general es una función no lineal [68].

En sistemas de control lineales con retardo, la ecuación de estado se describe por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i(t)\mathbf{x}(t - h_{xi}) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) + \sum_{i=1}^R \mathbf{B}_i(t)\mathbf{u}(t - h_{ui}) \quad (2.6)$$

donde $\mathbf{A}(t) \in R^{n \times n}$, $\mathbf{A}_i(t) \in R^{n \times n}$, $\mathbf{B}(t) \in R^{n \times p}$ y $\mathbf{B}_i(t) \in R^{n \times p}$.

La ecuación de salida se describe por

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^N \mathbf{C}_i(t)\mathbf{x}(t - h_{xi}) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) + \sum_{i=1}^R \mathbf{D}_i(t)\mathbf{u}(t - h_{ui}) \quad (2.7)$$

donde $\mathbf{C}(t) \in R^{q \times n}$, $\mathbf{C}_i(t) \in R^{q \times n}$, $\mathbf{D}(t) \in R^{q \times p}$ y $\mathbf{D}_i(t) \in R^{q \times p}$.

En (2.6) si las entradas son idénticamente cero, la ecuación de estado se reduce a

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i(t)\mathbf{x}(t - h_{xi}), \quad t \geq t_0 \quad (2.8)$$

que se conoce como la ecuación de estado homogénea en sistemas lineales con retardo [68].

El estado inicial es

$$\mathbf{x}(t) = \phi(t), \quad t \in [t_0 - \Delta_x, t_0] \quad (2.9)$$

donde $\phi(t)$ es el estado inicial del sistema y Δ_x denota al retardo de mayor tamaño [68].

Se puede demostrar que si $\mathbf{A}(\cdot)$ y $\mathbf{A}_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \dots, N$ son matrices reales y continuas, y además las constantes h_{xi} son positivas, una solución $\mathbf{x}(t, t_0, \phi, \mathbf{0})$ de (2.8) existe y depende únicamente del estado inicial $\phi(\cdot)$ dada por $\mathbf{x}(t) = \phi(t)$ [43]. Se supone que todas las funciones son reales, continuas y definidas en $t \in [t_0 - \Delta_x, t_0]$.

Teorema 2-1: Sean $\mathbf{A}(\cdot)$ y $\mathbf{A}_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \dots, N$ matrices continuas en $t \geq t_0 - \Delta_x$, donde Δ_x es el retardo de mayor tamaño entonces la solución de (2.8) es lineal con respecto a la función inicial $\phi(t)$.

Prueba: Sean $\mathbf{x}(t, t_0, \phi_1, \mathbf{0})$ y $\mathbf{x}(t, t_0, \phi_2, \mathbf{0})$ soluciones de (2.8) correspondientes a las funciones iniciales ϕ_1 y ϕ_2 respectivamente. Considerando la función

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{x}(t, t_0, \phi_1, \mathbf{0}) + c_2 \mathbf{x}(t, t_0, \phi_2, \mathbf{0}) \quad (2.10)$$

donde c_1 y c_2 son constantes escalares arbitrarias, se verifica que la función $\mathbf{x}(t)$ en (2.10) satisface (2.8). Además, $\mathbf{x}(t)$ en (2.10) satisface la condición inicial

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \phi_1(t) + c_2 \phi_2(t), \quad t \in [t_0 - \Delta_x, t_0] \quad (2.11)$$

luego

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, t_0, c_1 \phi_1 + c_2 \phi_2, \mathbf{0}) = c_1 \mathbf{x}(t, t_0, \phi_1, \mathbf{0}) + c_2 \mathbf{x}(t, t_0, \phi_2, \mathbf{0}) \quad (2.12)$$

que establece la linealidad de la solución respecto a la función inicial.

Si se considera retardo único, por ejemplo

$$h_{x1} = h, \quad \mathbf{A}_i(t) = \mathbf{0}, i = 2, 3, \dots, N \quad (2.13)$$

(2.8) se reduce a

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_1(t)\mathbf{x}(t - h), \quad t \geq t_0 \quad (2.14)$$

donde se supone que la matriz $\mathbf{A}(t) \in R^{n \times n}$ y la matriz $\mathbf{A}_1(t) \in R^{n \times n}$. Además, el estado inicial de (2.14) se describe mediante

$$\mathbf{x}(t) = \phi(t), \quad t_0 - h \leq t \leq t_0 \quad (2.15)$$

Así, el teorema ha sido probado.

Definición 3: La matriz $\Phi(t, \tau) \in R^{n \times n}$ es llamada *matriz fundamental* de (2.14) si satisface las condiciones siguientes

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, \tau) = \mathbf{A}(t)\Phi(t, \tau) + \mathbf{A}_1(t)\Phi(t - h, \tau), \quad t \geq t_0 \quad (2.16)$$

y

$$\Phi(t, \tau) = \mathbf{I}\delta(t - \tau), \quad t, \tau \in [t_0 - h, t_0] \quad (2.17)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad y $\delta(\cdot)$ es la función delta de Dirac.

La solución de (2.14) puede expresarse en términos de la matriz fundamental $\Phi(t, \tau)$.

Teorema 2-2: La solución de (2.14) con la condición inicial (2.15) es

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, t_0, \phi, \mathbf{0}) = \int_{t_0-h}^{t_0} \Phi(t, \tau)\phi(\tau)d\tau, \quad t \geq t_0 \quad (2.18)$$

Prueba: De (2.18) y (2.16) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \int_{t_0-h}^{t_0} \frac{d}{dt}(\Phi(t, \tau))\phi(\tau)d\tau = \int_{t_0-h}^{t_0} [\mathbf{A}(t)\Phi(t, \tau) + \mathbf{A}_1(t)\Phi(t - h, \tau)]\phi(\tau)d\tau \\ &= \mathbf{A}(t)\left[\int_{t_0-h}^{t_0} \Phi(t, \tau)\phi(\tau)d\tau\right] + \mathbf{A}_1(t)\left[\int_{t_0-h}^{t_0} \Phi(t - h, \tau)\phi(\tau)d\tau\right] \\ &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_1(t)\mathbf{x}(t - h) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Así, (2.18) satisface a (2.14). También para $t \in [t_0 - h, t_0]$ por (2.17) y (2.18) se tiene

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \int_{t_0-h}^{t_0} \mathbf{I}\delta(t - \tau)\phi(\tau)d\tau = \phi(t) \quad (2.20)$$

En el caso de retardo múltiple en la ecuación de estado, por extensión del teorema 2-2 se obtiene el teorema siguiente:

Teorema 2-3: La solución del sistema (2.8) y (2.9) es

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, t_0, \phi, \mathbf{0}) = \int_{t_0 - \Delta_x}^{t_0} \Phi(t, \tau) \phi(\tau) d\tau, \quad t \geq t_0 \quad (2.21)$$

donde la matriz fundamental $\Phi(t, \tau)$ es la solución de la ecuación

$$\frac{d}{dt} \Phi(t, \tau) = \mathbf{A}(t) \Phi(t, \tau) + \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i(t) \Phi(t - h_{xi}, t_0), \quad t \geq t_0 \quad (2.22)$$

con la condición inicial

$$\Phi(t, \tau) = \mathbf{I} \delta(t - \tau), \quad t, \tau \in [t_0 - \Delta_x, t_0] \quad (2.23)$$

la prueba se realiza de manera análoga a la demostración del teorema 2-2. Por otra parte, para los sistemas de control lineales con retardo cuya ecuación de estado se describe por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i(t) \mathbf{x}(t - h_{xi}) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) \quad (2.24)$$

y la ecuación de salida descrita por

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^N \mathbf{C}_i(t) \mathbf{x}(t - h_{xi}) + \mathbf{D}(t) \mathbf{u}(t) \quad (2.25)$$

son importantes los teoremas siguientes:

Teorema 2-4: El sistema (2.24) es controlable al origen si existe un tiempo finito $t_1 > t_0$ y la matriz

$$\mathbf{Q}_c(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Psi(t_1, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{B}^T(\tau) \Psi^T(t_1, \tau) d\tau \quad (2.26)$$

tiene rango n , donde $\Psi(t, \tau) \in R^{n \times n}$ es la matriz fundamental de (2.24) con $\mathbf{u} = 0$.

Para el caso de sistemas de control lineales invariantes en el tiempo con retardo único y constante [68], se considera la matriz

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{Q}_1^1 \mathbf{B}, \mathbf{Q}_1^2 \mathbf{B}, \mathbf{Q}_2^2 \mathbf{B}, \mathbf{Q}_1^3 \mathbf{B}, \mathbf{Q}_2^3 \mathbf{B}, \mathbf{Q}_3^3 \mathbf{B}, \dots, \mathbf{Q}_1^n \mathbf{B}, \mathbf{Q}_2^n \mathbf{B}, \dots, \mathbf{Q}_n^n \mathbf{B}] \quad (2.27)$$

donde

$$\mathbf{Q}_1^1 = \mathbf{I}, \mathbf{Q}_j^k = 0$$

para $j = 0$ o $j > k$. Y

$$\mathbf{Q}_j^{r+1} = \mathbf{A}\mathbf{Q}_j^r + \mathbf{A}_1\mathbf{Q}_{j-1}^r$$

Teorema 2-5: Los sistemas de control lineales con retardo, cuya ecuación de estado se describe por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_1\mathbf{x}(t-h) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2.28)$$

son controlables al origen si la matriz Q en (2.27) tiene rango n .

También, para los sistemas de control lineales con ecuación de estado (2.8), condición inicial (2.9) y ecuación de salida descrita por $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t)$ para $t \geq t_0$, se tiene el teorema siguiente:

Teorema 2-6: Un sistema de control lineal con retardo es observable en $[t_0, t_1]$ si la matriz

$$\mathbf{Q}_o(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Psi^T(t, t_0) C^T(t) C(t) \Psi(t, t_0) dt \quad (2.29)$$

tiene rango n , donde $\Psi(t, t_0) \in R^{n \times n}$ es la matriz fundamental de soluciones del sistema.

La matriz fundamental de soluciones debe satisfacer las condiciones siguientes:

- $\frac{\partial}{\partial \tau} \Psi(t, \tau) = -\Psi(t, \tau) \mathbf{A}(\tau) - \Psi(t, \tau + h) \mathbf{A}_1(\tau + h), \quad t_0 \leq \tau < t - h$
- $\frac{\partial}{\partial \tau} \Psi(t, \tau) = -\Psi(t, \tau) \mathbf{A}(\tau), \quad t - h \leq \tau \leq t$
- $\Psi(t, t) = I$
- $\Psi(t, \tau) = 0, \quad \tau > t$

donde $I \in R^{n \times n}$ es la matriz identidad.

2.2. Probabilidad y Procesos Estocásticos

2.2.1. Conceptos básicos de probabilidad

Definición 4: La observación de un fenómeno en determinadas condiciones, la cual se realiza en un periodo de tiempo repitiendo un experimento es llamada una *prueba*.

Definición 5: El conjunto de todos los resultados posibles de una prueba es llamado *espacio muestral* y usualmente es denotado por Ω .

Definición 6: Una característica cualitativa de una prueba consiste en registrar si los resultados de un experimento presentan un efecto. Este efecto es llamado *evento*.

Definición 7: Una característica cuantitativa de una prueba consiste en determinar los valores de las variables obtenidas como resultado de esa acción. Las variables pueden tener valores diferentes que no son predecibles con certeza. A estas variables se les llama *variables aleatorias*. Los valores específicos que toma una variable aleatoria son llamados *valores simples o realizaciones* de la *variable aleatoria*. Formalizando, una variable aleatoria X es una función que asigna un número real $X(\xi)$ a cada evento ξ en el espacio muestral de un experimento aleatorio.

Definición 8: La razón del número de apariciones de un evento respecto al número total de pruebas realizadas en condiciones similares, es llamada la *frecuencia relativa del evento*. Así, cuando un evento aparece m veces en n pruebas su frecuencia relativa en la serie de pruebas es m/n .

Definición 9: Con relación a la definición clásica de probabilidad, cuando se incrementa el número de pruebas realizadas en las mismas condiciones y los valores de la frecuencia relativa de un evento convergen a un número (regularidad estadística), ese número representa la *probabilidad* del evento. Por tanto, el número $P(A)$ al cual tiende la frecuencia relativa del evento A cuando el número de pruebas tiende a infinito es la probabilidad del evento A .

Definición 10: Sean Ω un espacio muestral y σ un conjunto de subconjuntos de Ω , σ es llamada una σ -álgebra si se satisfacen las condiciones siguientes:

- Para toda $A_i \in \sigma \leftrightarrow A_i^c \in \sigma$, donde A_i^c es el evento complementario al evento A_i
- Si $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \sigma$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \sigma$
- $\phi \in \sigma$, aquí ϕ denota al conjunto vacío

Definición 11: Sean Ω un espacio muestral y A un evento de una σ -álgebra definida en Ω , la función $P(A)$ es llamada *probabilidad (o medida de probabilidad de A)* si se cumplen las condiciones siguientes:

- $P(A) \geq 0$
- $P(\Omega) = 1$
- Si A_1, A_2, \dots , es una sucesión finita o infinita de eventos mutuamente excluyentes $A_i \cap A_j = \phi$, para todas i, j tales que $i \neq j$ se satisface $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$

Definición 12: Sea Ω un espacio muestral con determinada σ -álgebra y $A \in \sigma$ un evento con probabilidad P , la tríada (Ω, σ, P) es llamada *espacio de probabilidad*. Así, el espacio de probabilidad sirve como modelo matemático de fenómenos aleatorios en la teoría moderna de probabilidad.

Definición 13: *Espacios contables.* Sea Ω un espacio muestral que consiste de N pruebas, siendo N un número entero positivo finito. Sus eventos elementales ζ_i pueden expresarse en términos de las probabilidades $P\{\zeta_i\} = p_i$, que satisfacen a la ecuación $p_1 + \dots + p_N = 1$, donde p_i son números reales no negativos.

Definición 14: Sea Ω un espacio muestral con una σ -álgebra definida y los eventos A y B tal que $B \in \sigma$ y $P(B) \neq 0$, entonces la *probabilidad condicional* de un evento $A \in \sigma$ relativo al evento B es determinada por la fórmula

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

El evento A es *independiente* de B si $P(A|B) = P(A)$ y además

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

donde $P(AB)$ denota la probabilidad de la intersección de los eventos A y B .

En general, si $A_i \in \sigma$, $i = 1, 2, \dots, n$, los eventos A_1, \dots, A_n son *independientes* si cada uno de ellos no depende de los otros ni de cualquier otra intersección. La igualdad $P(A_1, \dots, A_n) = P(A_1) \cdots P(A_n)$ sirve como condición necesaria y suficiente de la independencia de los eventos A_1, \dots, A_n .

Definición 15: La *función de distribución acumulativa* de una variable aleatoria X se define mediante $F_X = P[X \leq x]$, $-\infty < x < \infty$

La función de distribución acumulativa tiene las propiedades siguientes:

- $0 \leq F_X(x) \leq 1$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$
- $F_X(x)$ es una *función no decreciente* de x en el intervalo (a, b) si se cumple

$$F_X(a) \leq F_X(b)$$
- $F_X(x)$ es una *función continua por la derecha* si se cumple

$$F_X(b) = \lim_{h \rightarrow 0} F_X(b + h) = F_X(b^+) \text{ con } h > 0$$

Las propiedades anteriores conducen a los teoremas siguientes:

Teorema 2-7: La probabilidad de los eventos correspondientes a los intervalos de la forma $a < X \leq b$, puede expresarse en términos de la función de distribución acumulativa $P[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a)$.

Prueba. Dado que $\{X \leq a\} \cup \{a < x \leq b\} = \{X \leq b\}$ y los dos eventos del miembro izquierdo son *mutuamente exclusivos*, entonces se cumple $F_X(a) + P[a < X \leq b] = F_X(b)$, por tanto, $P[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a)$.

Teorema 2-8: La probabilidad en el extremo derecho del intervalo continuo $(a, b]$ es $F_X(b) - F_X(b^-)$.

Prueba. Sea $a = b - \epsilon$ con $\epsilon > 0$, entonces $P[b - \epsilon < X] = F_X(b) - F_X(b - \epsilon)$ y a medida que $\epsilon \rightarrow 0$ entonces la probabilidad en el intervalo *se aproxima* a $P[X = b]$. Por tanto $P[X = b] = F_X(b) - F_X(b^-)$.

De manera similar, es posible calcular la probabilidad de otros tipos de intervalos, por ejemplo para $a \leq X \leq b$, se tiene

$$P[a \leq X \leq b] = P[X = a] + P[a < X \leq b] = F_X(a) - F_X(a^-) + F_X(b) - F_X(a) = F_X(b) - F_X(a^-).$$

por tanto, si la función de distribución acumulativa es continua en los extremos de un intervalo, estos tienen probabilidad cero y pueden ser incluidos o excluidos de ese intervalo.

Se concluye que para distintos tipos de intervalos se cumple

$$P[a < X < b] = P[a \leq X < b] = P[a < X \leq b] = P[a \leq X \leq b].$$

Resumiendo, *para toda variable aleatoria* X se cumplen las condiciones siguientes:

- $F_X(-\infty) = 0$
- $F_X(\infty) = 1$
- $P[x_1 < X \leq x_2] = F_X(x_2) - F_X(x_1)$

Definición 16: La función de densidad de probabilidad se define por

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

Definición 17: La función de distribución condicional de la variable aleatoria X dado el evento B se define como la probabilidad condicional del evento $\{X \leq x\}$, luego

$$F_X(x | B) = P\{X \leq x | B\}$$

Definición 18: La función de densidad condicional de la variable aleatoria X en el evento $\{X \leq x\}$ dado el evento B , es no negativa y su área es la unidad, se describe por

$$f_X(x | B) = \frac{dF_X(x | B)}{dx}$$

Definición 19: El valor esperado de una variable aleatoria continua X es

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

Definición 20: El n -ésimo momento de una variable aleatoria continua X se define como la n -ésima potencia de x , se calcula con

$$E[x^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) dx$$

Definición 21: X es una variable aleatoria Gaussiana si su *función de densidad de probabilidad* es $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, para $m \in R$ y $\sigma \in R^+$.

Una propiedad importante, es que *bajo cualquier transformación lineal de variables Gaussianas se obtiene otra variable Gaussiana*. Por ejemplo, si X es una variable aleatoria Gaussiana con los parámetros m y σ , entonces $Y = aX + b$ es otra variable aleatoria Gaussiana con parámetros $am + b$ y $|a|\sigma$.

Definición 22: El n -ésimo momento central de una variable aleatoria continua x con valor medio denotado por m , se calcula con

$$E[(x - m)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^n f_X(x) dx$$

El primer momento es la media de la variable aleatoria Gaussiana x y se calcula con $E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = m$. La varianza es el segundo momento central, es de particular interés y se calcula con $var[x] = E(x - E[x])^2 = E[x^2] - E^2[x] = \sigma^2$.

Definición 23: La covarianza de dos variables aleatorias X y Y se calcula con

$$Cov[X, Y] = E[(X - m_X)(Y - m_Y)] = E[XY] - m_X m_Y$$

Definición 24: Las variables aleatorias X y Y son no correlacionadas si su covarianza es cero.

Definición 25: El valor de la *esperanza condicional* de una variable aleatoria continua $g(X)$ dado un evento B se calcula con

$$E[g(X) | B] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x | B) dx$$

Definición 26: La *función característica* de una variable aleatoria continua X se define por

$$\phi(\omega) = E[e^{j\omega x}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} f_X(x) dx$$

donde $e^{j\omega x} = \cos\omega X + j\sin\omega X$ y j es la unidad de los números imaginarios.

Definición 27: La secuencia de variables aleatorias $X_n(\omega)$ con $n = 1, 2, \dots$, se dice que *converge en media cuadrática* si se cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n - X)^2 = 0$$

2.2.2. Conceptos básicos de procesos estocásticos

Definición 28: Un proceso estocástico $\mathbf{x}(t)$ consiste de un experimento con medida de probabilidad $P[.]$ definida en un espacio Ω y una relación que asigna una función de tiempo $\mathbf{x}(t, \zeta)$ a cada realización ζ en Ω .

Un proceso estocástico representa:

- una familia de funciones de tiempo si t y ζ son variables.
- una función de tiempo si t es variable y ζ constante.
- una variable aleatoria si t es constante y ζ variable.
- un número si t es constante y ζ constante.

Definición 29: La media $\eta(t)$ de un proceso estocástico $\mathbf{x}(t)$ es la función determinista

$$\eta(t) = E[\mathbf{x}(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, t) dx$$

Definición 30: La autocorrelación $R(t_1, t_2)$ de un proceso estocástico $\mathbf{x}(t)$ es el valor esperado del producto $\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)$ y se describe por

$$R(t_1, t_2) = E[\mathbf{x}(t_1)\mathbf{x}(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

donde valor $R(t, t)$ es la *potencia promedio* $\mathbf{x}(t)$ y equivale al valor esperado de $\mathbf{x}^2(t)$.

Definición 31: La autocovarianza $C(t_1, t_2)$ de un proceso estocástico $\mathbf{x}(t)$ es la covarianza de las variables aleatorias $X(t_1)$ y $X(t_2)$ y se determina con

$$C(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - \eta(t_1)\eta(t_2)$$

donde $C(t, t)$ equivale al valor de la varianza de la variable aleatoria $X(t)$.

Definición 32: Un proceso estocástico $\mathbf{x}(t)$ tiene incrementos independientes si $\forall n \in N, t_0 < t_1 < \dots < t_n$, las variables aleatorias $x_{t_0}, x_{t_1} - x_{t_0}, \dots, x_{t_n} - x_{t_{n-1}}$ son independientes.

Definición 33: El proceso Wiener ($\mathbf{W}(t), t > 0$) es un proceso estocástico real escalar o vectorial con incrementos independientes que satisface las condiciones siguientes:

- Todas las realizaciones $w(t)$ del proceso $\mathbf{W}(t)$ son continuas y $w(0) = 0$.
- La distribución en una dimensión del proceso $\mathbf{W}(t)$ es normal.
- Tiene esperanza cero y su función de covarianza se determina por

$$K_w(t_1, t_2) = \int_0^{\min(t_1, t_2)} \nu(\tau) d\tau$$

donde $\nu(t)$ es una función no negativa que representa la intensidad del proceso $\mathbf{W}(t)$.

Definición 34: El proceso aleatorio $\mathbf{x}(t)$ con media cero y función de covarianza que contiene como multiplicador a la función delta de Dirac es llamado *ruido blanco*. Se representa por las fórmulas $m_x(t) = 0$ y $K_x(t_1, t_2) = \nu(t_1)\delta(t_1 - t_2)$, donde la función delta de Dirac es la intensidad del ruido blanco. La varianza del ruido blanco es infinita y sus valores en dos puntos diferentes son no correlacionados.

Definición 35: Un proceso estocástico $\mathbf{x}(t)$ se dice que es *continuo en el tiempo t en media cuadrática*, si se cumple la condición $E[(x(t + \epsilon) - x(t))^2] \rightarrow 0$ a medida que $\epsilon \rightarrow 0$.

Teorema 2-9: Un proceso estocástico $\mathbf{x}(t)$ es continuo en media cuadrática si su autocorrelación es continua.

Prueba: Dado que

$$E[\mathbf{x}(t + \epsilon) - \mathbf{x}(t)]^2 = R(t + \epsilon, t + \epsilon) - 2R(t + \epsilon, t) + R(t, t)$$

además, si la autocorrelación $R(t_1, t_2)$ es continua, entonces el lado derecho de la ecuación inmediata anterior tiende a cero a medida que ϵ tiende a cero. Esto prueba que el proceso estocástico $\mathbf{x}(t)$ es continuo en media cuadrática.

Corolario 2-1: Si el proceso estocástico $\mathbf{x}(t)$ es continuo en media cuadrática, entonces su media es continua, luego

$$\eta(t + \epsilon) \rightarrow \eta(t), \quad \epsilon \rightarrow 0$$

Prueba: Dado que

$$E[\mathbf{x}(t + \epsilon) - \mathbf{x}(t)]^2 \geq E^2[\mathbf{x}(t + \epsilon) - \mathbf{x}(t)]$$

entonces se cumple

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} E[\mathbf{x}(t + \epsilon)] = E[\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{x}(t + \epsilon)] \rightarrow \eta(t)$$

Definición 36: Un proceso estocástico $\mathbf{x}(t)$ es diferenciable en media cuadrática si se cumple la condición

$$E\left\{\left[\frac{\mathbf{x}(t + \epsilon) - \mathbf{x}(t)}{\epsilon} - \mathbf{x}'(t)\right]^2\right\} \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0$$

El criterio de Cauchy nos permite demostrar que un proceso estocástico tiene derivada sin requerir el valor de la derivada $\mathbf{x}'(t_0)$. Así, para que un proceso estocástico tenga derivada en media cuadrática es necesario y suficiente que se cumpla la condición

$$E\left\{\left[\frac{\mathbf{x}(t + \epsilon_1) - \mathbf{x}(t)}{\epsilon_1} - \frac{\mathbf{x}(t + \epsilon_2) - \mathbf{x}(t)}{\epsilon_2}\right]^2\right\} \rightarrow 0$$

siempre que $\epsilon_1 \rightarrow 0$ y también $\epsilon_2 \rightarrow 0$.

2.3. Filtro de Kalman-Bucy para Sistemas en Tiempo Continuo

2.3.1. Conceptos básicos.

En sistemas de control lineales con medición de salida incompleta, el proceso de filtrado para minimizar la varianza del error de estimación del estado es conocido como el filtro de Kalman-Bucy.

En el diseño del filtro, es imperativo considerar la contribución de los ruidos asociados al sistema debido a que afectan de forma significativa su desempeño. Luego, el diseño del filtro concierne a los datos estadísticos de los ruidos.

El filtro de Kalman-Bucy entrega valores del estimado del estado cuya media converge a la media de los valores reales del estado [73].

Sea $x(t)$ un proceso aleatorio no medible completamente con dinámica de estado descrita por la ecuación diferencial

$$dx(t) = A(t)x(t)dt + B(t)dW_1(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.30)$$

y con la ecuación de salida descrita por

$$dy(t) = C(t)x(t)dt + D(t)dW_2(t) \quad (2.31)$$

donde los elementos de las matrices $A(t) \in R^{n \times n}$, $B(t) \in R^{n \times p_1}$, $C(t) \in R^{m \times n}$ y $D(t) \in R^{m \times p_2}$ son funciones continuas en el tiempo, $x(t) \in R^n$ es el vector de estados, $y(t) \in R^m$ es el vector de salida, los vectores $W_1(t) \in R^{p_1}$ y $W_2(t) \in R^{p_2}$ son ruidos blancos. La condición inicial $x_0 \in R^n$ es un vector Gaussiano tal que x_0 , $W_1(t)$ y $W_2(t)$ son procesos independientes. Todos los coeficientes de las ecuaciones (2.30) y (2.31) son funciones determinísticas de dimensiones apropiadas.

Se supone que la matriz $C(t)$ es no nula y la matriz $D(t)D^T(t)$ es definida positiva.

La estimación óptima del estado respecto a la salida $Y(t) = y(s)$ con $s \in [0, t]$, se obtiene al minimizar el índice de desempeño

$$J = E[(x(t) - \hat{x})^T(x(t) - \hat{x}) | F_t^Y] \quad (2.32)$$

en cada instante t , donde F_t^Y es la σ -álgebra generada por las mediciones $y(s)$ en el intervalo $t_0 \leq s < t$ hasta el tiempo presente t .

Como se sabe ([71, 72]), el estimado óptimo del estado con relación a la σ -álgebra F_t^Y generada por la salida $Y(t)$ en el intervalo $[t_0, t]$, se obtiene con la ecuación

$$\hat{x} = m(t) = E(x(t) | F_t^Y) \quad (2.33)$$

Definición 37: En los sistemas de control con medición incompleta de estado, *el error de estimación* es la diferencia entre el valor real del estado y su estimado. El estimado del estado en cada instante t del horizonte de filtrado es proporcionado por un filtro acoplado al sistema. El error de estimación se denota por $\varepsilon = x(t) - \hat{x}(t)$.

Si se toma la esperanza del segundo momento del error de estimación, se obtiene la matriz de covarianza. Los elementos de la diagonal principal de la matriz de covarianza son las varianzas de las variables de estado y los elementos restantes son las covarianzas de las variables de estado.

La varianza condicional del error de estimación de estado respecto al proceso estocástico F_t^Y [72], se define por

$$P(t) = E[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y] \quad (2.34)$$

Para el estimado óptimo del estado [72], se tiene

$$dm(t) = A(t)m(t)dt + P(t)C^T(t)(D(t)D^T(t))^{-1}[dy(t) - C(t)m(t)dt] \quad (2.35)$$

con la condición inicial $m(t_0) = E[x(t_0) | F_{t_0}^y]$.

Para la varianza del error de estimación del estado [72], se tiene

$$\dot{P}(t) = P(t)A^T(t) + A(t)P(t) + B(t)B^T(t) - P(t)C^T(t)(D(t)D^T(t))^{-1}C(t)P(t) \quad (2.36)$$

con la condición inicial $P(t_0) = E[[x(t_0) - m(t_0)][x(t_0) - m(t_0)]^T | F_{t_0}^Y]$.

Las condiciones para la existencia de la solución de (2.36) consideran que las matrices $B(t)B^T(t)$ y $C^T(t)(D(t)D^T(t))^{-1}C(t)$ son simétricas definidas no negativas y además, cuando la condición inicial P_0 es no negativa la solución es única.

Los sistemas de ecuaciones (2.35) y (2.36) constituyen el filtro de Kalman-Bucy [73].

2.4. Control Óptimo en Sistemas Lineales

2.4.1. Conceptos básicos

La teoría moderna de control óptimo tiene sus raíces en el cálculo de variaciones [78]. El problema de control óptimo para sistemas en tiempo continuo se caracteriza por determinar un objetivo, el cual consiste en encontrar la ley de control $u(t)$ que actúe sobre el sistema en cierto intervalo $t \in [t_0, t_f]$ y que optimice (minimice o maximice) un criterio de desempeño considerado. La trayectoria de estado que satisface las limitaciones de la variable de estado en el intervalo de control es llamada *trayectoria admisible* [78].

El índice de desempeño como expresión matemática de las cualidades deseadas del sistema controlado, puede ser tan variado como plantas distintas y aplicaciones de diseño existan.

Algunas categorías de los problemas de control que se definen por el formato del índice de desempeño son: el problema de tiempo mínimo, el problema de consumo mínimo de combustible, el problema de seguimiento, el problema de consumo mínimo de energía [79].

Principio de Separación: En sistemas de control lineales afectados por perturbaciones estocásticas y con índice de desempeño cuadrático, el principio de separación puede emplearse para desacoplar en dos secciones el sistema de control estocástico completo. Una sección es el controlador óptimo determinista en el que se tiene el conocimiento exacto y completo de todos los estados del sistema y la sección restante es el filtro óptimo que procesa las mediciones incompletas y con ruido de los estados para obtener los estimados del estado del sistema. Estos estimados son utilizados por el controlador óptimo en lugar de los estados [77].

Teorema 2-10: La solución óptima del problema del controlador con realimentación de salida estocástica es la misma que la solución del problema del controlador con realimentación de estado óptimo estocástico, excepto que en la ley de control $u(t)$, el estado $x(t)$ del sistema es reemplazado por su estimado óptimo $m(t)$. La entrada de control se selecciona como $u(t) = -F^0(t)m(t)$, donde $F^0(t)$ es la matriz de ganancia del regulador óptimo y $m(t)$ es la salida del filtro óptimo.

2.4.2. El problema de control óptimo en sistemas lineales

En muchos sistemas de control se presentan problemas de optimización, por ejemplo si se requiere llevar a cero el estado tan rápido como sea posible y a la vez acotar la magnitud de las entradas. Sea un sistema lineal descrito por

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (2.37)$$

donde $x(t) \in R^n$ es el vector de estados del sistema, $u(t) \in R^m$ es la entrada de control, $A(t) \in R^{n \times n}$ y $B \in R^{n \times m}$.

La función de costo a minimizar se define por

$$J = \frac{1}{2}x^T(T_1)\psi x(T_1) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{T_1} u^T(s)R(s)u(s)ds + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{T_1} x^T(s)L(s)x(s)ds \quad (2.38)$$

donde $R^{m \times m}$ es una matriz simétrica definida positiva, $\psi^{n \times n}$ y $L^{n \times n}$ son matrices simétricas definidas no negativas. Se considera también que $T_1 > t_0$.

En la resolución del problema de control óptimo, es necesario encontrar la entrada de control $u^*(t)$ en $t \in [t_0, T_1]$ que minimice la función de costo J a través de la trayectoria $x^*(t)$, generada en $t \in [t_0, T_1]$ al sustituir $u^*(t)$ en la ecuación de estado.

2.4.3. Solución del problema de control óptimo en sistemas lineales

El problema de control óptimo descrito por (2.37) y (2.38) se resuelve de manera similar como aparece en [30]. Luego, la matriz de ganancia para el control óptimo es

$$K_c = (R(t))^{-1}B^T(t)Q(t)$$

y la ley de control óptimo se determina por

$$u^*(t) = K_c x = (R(t))^{-1}B^T(t)Q(t)x(t) \quad (2.39)$$

La función matricial $Q(t)$ es la solución de la ecuación de Riccati

$$\dot{Q}(t) = -A^T(t)Q(t) - Q(t)A(t) + L(t) - Q(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)Q(t) \quad (2.40)$$

Al sustituir la ley de control óptimo (2.39) en (2.37), se obtiene la ecuación de estado óptimamente controlado

$$\dot{x}(t) = [A(t) + B(t)(R(t))^{-1}B^T(t)Q(t)]x(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.41)$$

De esta forma, se resuelve el problema de control óptimo para el sistema lineal descrito por (2.37), sujeto al criterio de minimización (2.38) y gobernado por el control (2.39).

Capítulo 3

Filtrado Óptimo para Sistemas de Estado Polinomial con Ruido Multiplicativo Polinomial

3.1. Problema de Filtrado para Estado Polinomial con Ruido Multiplicativo sobre Observaciones Lineales

Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad completo con una creciente familia real continua de σ -álgebras $F_t, t \geq t_0$, y sea $(W_1(t), F_t, t \geq t_0)$ y $(W_2(t), F_t, t \geq t_0)$ procesos de Wiener independientes. Los procesos aleatorios F_t -medibles $(x(t), y(t))$ es descrito por una ecuación diferencial no lineal con ambos términos "drift y difusión" polinomiales para el estado del sistema

$$dx(t) = f(x, t)dt + g(x, t)dW_1(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

y una ecuación diferencial lineal para el proceso de observación

$$dy(t) = (A_0(t) + A(t)x(t))dt + B(t)dW_2(t). \quad (2)$$

Aquí, $x(t) \in R^n$ es el vector de estado y $y(t) \in R^n$ es el vector de observación lineal, tal que la matriz $A(t) \in R^{n \times n}$ es invertible. La condición inicial $x_0 \in R^n$ es un vector Gaussiano tal que x_0 , $W_1(t)$, y $W_2(t)$ son independientes. Esto es supuesto que $B(t)B^T(t)$ es una matriz definida positiva. Todos los coeficientes en (1)–(2) son funciones determinísticas de tiempo de dimensiones apropiadas. La función "difusión" no lineal $g(x, t)$ forma un ruido multiplicativo dependiente de estado en la ecuación (1).

Las funciones no lineales $f(x, t)$ y $g(x, t)$ son considerados polinomiales de n variables, componentes del vector de estado $x(t) \in R^n$, con coeficientes dependientes de tiempo. Ya que $x(t) \in R^n$ es un vector, esto requiere una definición especial de la polinomial para $n > 1$; algunos de ellos pueden ser encontrados en [23, 24, 62]. En este capítulo, un polinomio de grado p de un vector $x(t) \in R^n$ es considerado como una forma p -lineal de n componentes de $x(t)$

$$f(x, t) = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)xx^T + \dots + a_p(t)x \dots_p \text{ times} \dots x, \quad (3)$$

donde $a_0(t)$ es un vector de dimensión n , a_1 es una matriz de dimensión $n \times n$, a_2 es un tensor 3D de dimensión $n \times n \times n$, a_p es un tensor $(p+1)$ D de dimensión $n \times \dots_{(p+1) \text{ times}} \dots \times n$, y $x \times \dots_p \text{ times} \dots \times x$ es un tensor p D de dimensión $n \times \dots_p \text{ times} \dots \times n$ obtenido por p veces la multiplicación de espacio del vector $x(t)$ por si mismo. Tal polinomio puede ser expresado en la forma de suma

$$\begin{aligned} dx_k(t)/dt &= a_{0\ k}(t) + \sum_i a_{1\ ki}(t)x_i(t) + \sum_{ij} a_{2\ kij}(t)x_i(t)x_j(t) + \dots \\ &+ \sum_{i_1 \dots i_p} a_{p\ ki_1 \dots i_p}(t)x_{i_1}(t) \dots x_{i_p}(t), \quad k, i, j, i_1 \dots i_p = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

El problema de estimación es encontrar el estimado óptimo $\hat{x}(t)$ para el estado $x(t)$, basado sobre los procesos de observación $Y(t) = \{y(s), 0 \leq s \leq t\}$, que minimiza la norma-2 Euclideana

$$J = E[(x(t) - \hat{x}(t))^T(x(t) - \hat{x}(t)) \mid F_t^Y]$$

en cualquier momento de tiempo t . Aquí, $E[z(t) \mid F_t^Y]$ significa la esperanza condicional de un proceso estocástico $z(t) = (x(t) - \hat{x}(t))^T(x(t) - \hat{x}(t))$ con respecto a la σ -álgebra F_t^Y generada por el proceso de observación $Y(t)$ en el intervalo $[t_0, t]$. Como es conocido en [63], este estimado óptimo es dado por la esperanza condicional

$$\hat{x}(t) = m(t) = E(x(t) \mid F_t^Y)$$

del sistema de estado $x(t)$ con respecto a la σ -álgebra F_t^Y generada por el proceso de observación $Y(t)$ en el intervalo $[t_0, t]$. Como es usual, la función matricial

$$P(t) = E[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T \mid F_t^Y]$$

es el estimado de la varianza del error.

La solución propuesta a este problema de filtrado óptimo es basado sobre las fórmulas para el diferencial de Ito de la esperanza condicional $E(x(t) \mid F_t^Y)$ y su varianza $P(t)$ (citada por [63]) y dada en la siguiente sección.

3.2. Filtro Óptimo para Estado Polinomial con Ruido Multiplicativo sobre Observaciones Lineales

Las ecuaciones de filtrado óptimo serán obtenidas usando la fórmula para el diferencial de Ito de la esperanza condicional $m(t) = E(x(t) \mid F_t^Y)$ (ver [63])

$$dm(t) = E(f(x, t) \mid F_t^Y)dt + E(x[\varphi_1(x) - E(\varphi_1(x) \mid F_t^Y)]^T \mid F_t^Y) \times$$

$$(B(t)B^T(t))^{-1}(dy(t) - E(\varphi_1(x) | F_t^Y)dt),$$

donde $f(x, t)$ es el término "drift" polinomial en la ecuación de estado, y $\varphi_1(x)$ es el término "drift" lineal en la ecuación de observación igual a $\varphi_1(x) = A_0(t) + A(t)x(t)$. Bajo la sustitución del desempeño, la ecuación de estado toma la forma

$$\begin{aligned} dm(t) &= E(f(x, t) | F_t^Y)dt + E(x(t)[A(t)(x(t) - m(t))]^T | F_t^Y) \times \\ &\quad (B(t)B^T(t))^{-1}(dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t))) = \\ &\quad E(f(x, t) | F_t^Y)dt + E(x(t)(x(t) - m(t))^T | F_t^Y)A^T(t) \times \\ &\quad (B(t)B^T(t))^{-1}(dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t))dt) = \\ &\quad E(f(x, t) | F_t^Y)dt + P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}(dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t))dt). \end{aligned} \quad (4)$$

La ecuación (4) será complementada con la condición inicial $m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y)$.

Tratando de componer un sistema cerrado de las ecuaciones de filtrado, la ecuación (4) será complementada con la ecuación para la varianza del error $P(t)$. Para este propósito, la fórmula para el diferencial de Ito de la varianza $P(t) = E((x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y)$ será usada (citada otra vez por [63]):

$$\begin{aligned} dP(t) &= (E((x(t) - m(t))(f(x, t))^T | F_t^Y) + E(f(x, t)(x(t) - m(t))^T | F_t^Y) + \\ &\quad E(g(x, t)g^T(x, t) | F_t^Y) - E(x(t)[\varphi_1(x) - E(\varphi_1(x) | F_t^Y)]^T | F_t^Y) \times \\ &\quad (B(t)B^T(t))^{-1}E([\varphi_1(x) - E(\varphi_1(x) | F_t^Y)]x^T(t) | F_t^Y))dt + \\ &\quad E((x(t) - m(t))(x(t) - m(t))[\varphi_1(x) - E(\varphi_1(x) | F_t^Y)]^T | F_t^Y) \times \\ &\quad (B(t)B^T(t))^{-1}(dy(t) - E(\varphi_1(x) | F_t^Y)dt), \end{aligned}$$

donde el último término será entendido como un tensor 3D (bajo la esperanza de la muestra) convolucionado con un vector, la cual produce una matriz. Bajo las sustituciones las expresión para φ_1 , la última fórmula toma la forma

$$\begin{aligned}
dP(t) = & (E((x(t) - m(t))(f(x, t))^T \mid F_t^Y) + E(f(x, t)(x(t) - m(t))^T \mid F_t^Y) + \\
& E(g(x, t)g^T(x, t) \mid F_t^Y) - (E(x(t)(x(t) - m(t))^T \mid F_t^Y)A^T(t) \times \\
& (B(t)B^T(t))^{-1}A(t)E((x(t) - m(t))x^T(t) \mid F_t^Y))dt + \\
& E((x(t) - m(t))(x(t) - m(t))(A(t)(x(t) - m(t)))^T \mid F_t^Y)(B(t)B^T(t))^{-1} \times \\
& (dy(t) - A(t)m(t))dt).
\end{aligned}$$

Usando la fórmula de la varianza $P(t) = E((x(t) - m(t))x^T(t) \mid F_t^Y)$, la última ecuación puede ser representada como

$$\begin{aligned}
dP(t) = & (E((x(t) - m(t))(f(x, t))^T \mid F_t^Y) + E(f(x, t)(x(t) - m(t))^T \mid F_t^Y) + \quad (5) \\
& E(g(x, t)g^T(x, t) \mid F_t^Y) - P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t))dt + \\
& E(((x(t) - m(t))(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T \mid F_t^Y) \times \\
& A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}(dy(t) - A(t)m(t - h))dt).
\end{aligned}$$

La ecuación (5) será complementada con la condición inicial $P(t_0) = E[(x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T \mid F_{t_0}^Y]$.

Las ecuaciones (4) y (5) para el estimado óptimo $m(t)$ y la varianza del error $P(t)$ forman un sistema abierto de las ecuaciones de filtrado para el estado no lineal (1) sobre observaciones lineales (2).

Probemos ahora que este sistema se convierte a un sistema cerrado de las ecuaciones de filtrado en vista de las propiedades polinomiales de las funciones $f(x, t)$ y $g(x, t)$ en la ecuación (1).

Como es mostrado en [23, 24], un sistema cerrado de las ecuaciones de filtrado para un sistema de estado con "drift" polinomial y "difusión" independiente de estado sobre observaciones lineales puede ser obtenida si la matriz de observación $A(t)$ es invertible para cualquier $t \geq t_0$. La última condición, también asumida para el proceso de observación (2), implica ([23, 24]) que la variable aleatoria $x(t) - m(t)$ es condicionalmente Gaussiana con respecto a los procesos de observación $y(t)$ para cualquier $t \geq t_0$. Aquí, las siguientes consideraciones en [23, 24] son aplicables a las ecuaciones de filtrado (4),(5).

Primero, ya que la variable aleatoria $x(t) - m(t)$ es condicionalmente Gaussiana, el tercer momento condicional $E((x(t) - m(t))(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y)$ de $x(t) - m(t)$ con respecto a observaciones, el cual perdura en el último término de la ecuación (5), es igual a cero, porque el proceso $x(t) - m(t)$ es condicionalmente Gaussiana. De este modo, el último término completo en (5) es desaparecido y la siguiente ecuación de la varianza es obtenida

$$dP(t) = (E((x(t) - m(t))(f(x, t))^T | F_t^Y) + E(f(x, t)(x(t) - m(t))^T | F_t^Y) + \quad (6)$$

$$E(g(x, t)g^T(x, t) | F_t^Y) - P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t))dt,$$

con la condición inicial $P(t_0) = E[(x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y]$.

Segundo, si las funciones $f(x, t)$ y $g(x, t)$ son funciones polinomiales del estado x con coeficientes dependientes del tiempo, las expresiones de los términos $E(f(x, t) | F_t^Y)$ en (4) y $E((x(t) - m(t))f^T(x, t) | F_t^Y)$ y $E(g(x, t)g^T(x, t) | F_t^Y)$ en (6) pudiera también incluir sólo términos polinomiales de x . Entonces, esos términos polinomiales pueden ser representados como funciones de $m(t)$ y $P(t)$ usando la siguiente propiedad de variable aleatoria Gaussiana $x(t) - m(t)$: todos sus momentos condicionales impares, $m_1 = E[(x(t) - m(t)) | Y(t)]$, $m_3 = E[(x(t) - m(t))^3 | Y(t)]$, $m_5 = E[(x(t) - m(t))^5 | Y(t)]$, ... son igual a 0, y todos sus momentos condicionales pares $m_2 = E[(x(t) - m(t))^2 |$

$Y(t)]$, $m_4 = E[(x(t) - m(t))^4 | Y(t)]$, ... pueden ser representadas como funciones de la varianza $P(t)$. Por ejemplo, $m_2 = P$, $m_4 = 3P^2$, $m_6 = 15P^3$, ... etc. Después de representar todos los términos polinomiales (4) y (6), que son generados bajo la expresión $E(f(x, t) | F_t^Y)$, $E((x(t) - m(t))f^T(x, t) | F_t^Y)$, y $E(g(x, t)g^T(x, t) | F_t^Y)$, como funciones de $m(t)$ y $P(t)$, una forma cerrada de las ecuaciones de filtrado será obtenida. Las correspondientes representaciones de $E(f(x, t) | F_t^Y)$ y $E((x(t) - m(t))(f(x, t))^T | F_t^Y)$ han sido desarrolladas en [23, 24] para ciertas funciones polinomiales $f(x, t)$.

En la siguiente subsección, una forma cerrada de las ecuaciones de filtrado serán obtenidas de (4) y (6) para funciones lineal y bilineal $f(x, t)$ y $g(x, t)$ en la ecuación (1). Esto será notado, de cualquier modo, que el uso del mismo procedimiento podría resultar en calcular un sistema cerrado de las ecuaciones de filtrado para cualesquiera funciones polinomiales $f(x, t)$ y $g(x, t)$ en (1).

3.2.1. Filtro Óptimo para Estado Lineal con Ruido Multiplicativo Lineal

En un caso particular, si las funciones $f(x, t) = a_0(t) + a_1(t)x(t)$ y $g(x, t) = b_0(t) + b_1(t)x(t)$ son lineales, donde b_1 es un tensor 3D de dimensión $n \times n \times n$, las representaciones para $E(f(x, t) | F_t^Y)$, $E((x(t) - m(t))(f(x, t))^T | F_t^Y)$, y $E(g(x, t)g^T(x, t) | F_t^Y)$ como funciones de $m(t)$ y $P(t)$ son desarrolladas como sigue

$$E(f(x, t) | F_t^Y) = a_0(t) + a_1(t)m(t), \quad (7)$$

$$E(f(x, t)(x(t) - m(t))^T | F_t^Y) + E((x(t) - m(t))(f(x, t))^T | F_t^Y) = a_1(t)P(t) + P(t)a_1^T(t). \quad (8)$$

$$E(g(x, t)g^T(x, t) | F_t^Y) = b_0(t)b_0^T(t) + b_0(t)(b_1(t)m(t))^T + \quad (9)$$

$$(b_1(t)m(t))b_0^T(t) + b_1(t)P(t)b_1^T(t) + b_1(t)m(t)m^T(t)b_1^T(t),$$

donde $b_1^T(t)$ denota el tensor obtenido de $b_1(t)$ transponiendo sus dos índices derechos.

Sustituyendo la expresión (7) en (4) y las expresiones (8),(9) en (6), las ecuaciones de filtrado para el estimado óptimo $m(t)$ y la varianza del error $P(t)$ son obtenidas

$$dm(t) = (a_0(t) + a_1(t)m(t))dt + \quad (10)$$

$$P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}[dy(t) - A(t)m(t)dt], \quad m(t_0) = E(x(t_0) | F_t^Y),$$

$$dP(t) = (a_1(t)P(t) + P(t)a_1^T(t) + \quad (11)$$

$$b_0(t)b_0^T(t) + b_0(t)(b_1(t)m(t))^T + (b_1(t)m(t))b_0^T(t) + b_1(t)P(t)b_1^T(t) +$$

$$b_1(t)m(t)m^T(t)b_1^T(t))dt - P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t)dt.$$

$$P(t_0) = E((x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_t^Y).$$

Note que la matriz de observación $A(t)$ también no debe ser necesariamente invertible para obtener las ecuaciones de filtrado (10)–(11). Realmente, la única polinomial usada, $E(x(t)x^T(t) | F_t^Y) = P(t) + m(t)m^T(t)$, es válida para cualquier variable aleatoria con momentos segundo finito, no sólo en Gaussiana.

3.2.2. Filtro Óptimo para Estado Bilineal con Ruido Multiplicativo Bilineal

Sean las funciones

$$f(x, t) = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)xx^T \quad (12)$$

y

$$g(x, t) = b_0(t) + b_1(t)x + b_2(t)xx^T \quad (13)$$

polinomiales bilineales, donde x es un vector n -dimensional, $a_0(t)$ es un vector n -dimensional, $a_1(t)$ y $b_0(t)$ son matrices $n \times n$, $a_2(t)$ y $b_1(t)$ son tensores 3D de dimensión $n \times n \times n$, y $b_2(t)$ es un tensor 4D de dimensión $n \times n \times n \times n$. En este caso, las representaciones para $E(f(x, t) | F_t^Y)$, $E((x(t) - m(t))(f(x, t))^T | F_t^Y)$, y $E(g(x, t)g^T(x, t) | F_t^Y)$ como funciones de $m(t)$ y $P(t)$ son desarrolladas como sigue (ver [23, 24])

$$E(f(x, t) | F_t^Y) = a_0(t) + a_1(t)m(t) + a_2(t)m(t)m^T(t) + a_2(t)P(t), \quad (14)$$

$$E(f(x, t)(x(t) - m(t))^T | F_t^Y) + E((x(t) - m(t))(f(x, t))^T | F_t^Y) = \\ a_1(t)P(t) + P(t)a_1^T(t) + 2a_2(t)m(t)P(t) + 2(a_2(t)m(t)P(t))^T. \quad (15)$$

$$E(g(x, t)g^T(x, t) | F_t^Y) = b_0(t)b_0^T(t) + b_0(t)(b_1(t)m(t))^T + \\ (b_1(t)m(t))b_0^T(t) + b_1(t)P(t)b_1^T(t) + b_1(t)m(t)m^T(t)b_1^T(t) + \\ b_0(t)(P(t) + m(t)m^T(t))b_2^T(t) + b_2(t)(P(t) + m(t)m^T(t))b_0^T(t) + \\ b_1(t)(3m(t)P(t) + m(t)(m(t)m^T(t)))b_2^T(t) + b_2(t)(3P(t)m^T(t) + (m(t)m^T(t))m^T(t))b_1^T(t) + \\ 3b_2(t)P^2(t)b_2^T(t) + 3b_2(t)(P(t)m(t)m^T(t) + m(t)m^T(t)P(t))b_2^T(t) + b_2(t)(m(t)m^T(t))^2b_2^T(t). \quad (16)$$

donde $b_2^T(t)$ denota el tensor obtenido de $b_2(t)$ transponiendo sus dos índices derechos.

Sustituyendo la expresión (14) en (4) y la expresión (15),(16) en (6), las ecuaciones de filtrado para el estimado óptimo $m(t)$ y la varianza del error $P(t)$ son obtenidas

$$dm(t) = (a_0(t) + a_1(t)m(t) + a_2(t)m(t)m^T(t) + a_2(t)P(t))dt + \quad (17)$$

$$P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}[dy(t) - A(t)m(t)dt], \quad m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y), \\ dP(t) = (a_1(t)P(t) + P(t)a_1^T(t) + 2a_2(t)m(t)P(t) + 2(a_2(t)m(t)P(t))^T + \\ b_0(t)b_0^T(t) + b_0(t)(b_1(t)m(t))^T + (b_1(t)m(t))b_0^T(t) + b_1(t)P(t)b_1^T(t) + \\ b_1(t)m(t)m^T(t)b_1^T(t) + b_0(t)(P(t) + m(t)m^T(t))b_2^T(t) +$$

$$\begin{aligned}
& b_2(t)(P(t) + m(t)m^T(t))b_0^T(t) + b_1(t)(3m(t)P(t) + m(t)(m(t)m^T(t)))b_2^T(t) + \\
& b_2(t)(3P(t)m^T(t) + (m(t)m^T(t))m^T(t))b_1^T(t) + 3b_2(t)P^2(t)b_2^T(t) + \\
& 3b_2(t)(P(t)m(t)m^T(t) + m(t)m^T(t)P(t))b_2^T(t) + \\
& b_2(t)(m(t)m^T(t))^2b_2^T(t))dt - P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t)dt. \\
& P(t_0) = E((x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_t^Y).
\end{aligned}$$

Por medio de la derivación precedente, el siguiente resultado es demostrado.

Teorema 1. El filtro óptimo dimensión finita para el estado bilineal con ruido multiplicativo bilineal (1), donde los polinomios bilineales $f(x, t)$ y $g(x, t)$ son definidas por (12),(13), sobre las observaciones lineales (2), es dado por la ecuación (17) para el estimado óptimo $m(t) = E(x(t) | F_t^Y)$ y la ecuación (18) para el cálculo de la varianza del error $P(t) = E[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y]$.

Así, basado sobre el sistema abierto general de las ecuaciones de filtrado (4),(6), esto es probado que un sistema cerrado de las ecuaciones de filtrado pueden ser obtenidas para cualquier estado polinomial con un ruido multiplicativo polinomial (1) sobre observaciones lineales (2). Además, la forma específica (17),(18) del sistema cerrado de las ecuaciones de filtrado correspondiente a un estado bilineal con un ruido multiplicativo bilineal es derivada. En la siguiente sección, el desempeño del filtro óptimo diseñado para un estado bilineal con un ruido multiplicativo bilineal sobre observaciones lineales es verificado contra el filtro óptimo para un estado bilineal con un ruido independiente de estado y un filtro de Kalman-Bucy extendido convencional.

3.3. Ejemplo

Esta sección presenta un ejemplo de calcular el filtro óptimo para un estado cuadrático con un ruido multiplicativo cuadrático sobre observaciones lineales, comparándolo con el

filtro óptimo para un estado cuadrático con un ruido independiente de estado y un filtro de Kalman-Bucy extendido convencional.

Sea el estado real $x(t)$ que satisface la ecuación cuadrática

$$\dot{x}(t) = 0,1x^2(t) + 0,1x^2(t)\psi_1(t), \quad x(0) = x_0, \quad (19)$$

y el proceso de observación dado por la ecuación lineal

$$y(t) = x(t) + \psi_2(t), \quad (20)$$

donde $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$ son ruidos blancos Gaussianos, las cuales son las derivadas débiles en promedio cuadrático de procesos estandar de Wiener (ver [63]). Las ecuaciones (19),(20) presentan la forma convencional para las ecuaciones (1),(2), la cual es actualmente usada en práctica [80].

El problema de filtrado es encontrar el estimado óptimo para el estado cuadrático con ruido cuadrático (19), usando observaciones lineales (20) mezcladas con perturbaciones independientes e idénticamente distribuidas modeladas como ruidos blancos Gaussianos. Sea el tiempo de horizonte de filtrado a $T = 9,2$.

Las ecuaciones de filtrado (17),(18) toma la siguiente forma particular para el sistema (19),(20)

$$\dot{m}(t) = 0,1(m^2(t) + P(t)) + P(t)[y(t) - m(t)], \quad (21)$$

con la condición inicial $m(0) = E(x(0) | y(0)) = m_0$,

$$\dot{P}(t) = 0,4P(t)m(t) + 0,03P^2(t) + 0,06P(t)m^2(t) + 0,01m^4(t) - P^2(t), \quad (22)$$

con la condición inicial $P(0) = E((x(0) - m(0))(x(0) - m(0))^T | y(0)) = P_0$.

Los estimados obtenidos bajo la solución de las ecuaciones (21)–(22) son comparados primero para los estimados satisfaciendo las ecuaciones de filtrado óptimo para un estado

cuadrático con un ruido independiente de estado (ver [23]), basado sobre el sistema (19) donde el ruido multiplicativo cuadrático $x^2(t)\psi_1(t)$ es reemplazado por el ruido aditivo estandar $\psi_1(t)$. Las ecuaciones de filtrado correspondiente son dadas por

$$\dot{m}_1(t) = 0,1(m_1^2(t) + P_1(t)) + P_1(t)[y(t) - m_1(t)], \quad (23)$$

con la condición inicial $m(0) = E(x(0) | y(0)) = m_0$,

$$\dot{P}_1(t) = 0,4P_1(t)m(t) + 0,01 - P_1^2(t), \quad (24)$$

con la condición inicial $P(0) = E((x(0) - m(0))(x(0) - m(0))^T | y(0)) = P_0$.

Los estimados obtenidos bajo la solución de las ecuaciones (21)–(22) son también comparados con los estimados satisfaciendo las siguientes ecuaciones de filtrado de Kalman-Bucy extendido para un estado cuadrático (19) sobre observaciones lineales (20), obtenidas por reemplazar el ruido multiplicativo cuadrático $x^2(t)\psi_1(t)$ por el ruido aditivo estandar $\psi_1(t)$, usando la copia directa de la de la dinámica del estado (19) en la ecuación estimada, y asignando la ganancia del filtro como la solución de la ecuación de Riccati:

$$\dot{m}_K(t) = 0,1m_K^2(t) + P_K(t)[y(t) - m_K(t)], \quad (25)$$

con la condición inicial $m_K(0) = E(x(0) | y(0)) = m_0$,

$$\dot{P}_K(t) = 0,4P_K(t) + 0,01 - P_K^2(t), \quad (26)$$

con la condición inicial $P_K(0) = E((x(0) - m(0))(x(0) - m(0))^T | y(0)) = P_0$.

Los resultados de la simulación numérica son obtenidos resolviendo los sistemas de ecuaciones de filtrado (21)–(22), (23)–(24), y (25)–(26). Los valores obtenidos de los estimados $m(t)$, $m_1(t)$, y $m_K(t)$ satisfacen las ecuaciones (21), (23), y (25), respectivamente, son comparadas para los valores reales de las variables de estado $x(t)$ en (19).

Para cada uno de los tres filtros (21)–(22), (23)–(24), y (25)–(26) y el sistema de referencia (19)–(20) involucrado en la simulación, los siguientes valores iniciales son asignados: $x_0 = 1,1$, $m_0 = 0,1$, $P_0 = 1$. Perturbaciones Gaussianas $\psi_1(t)$ en (19) y $\psi_2(t)$ en (20) son realizadas usando la función de ruido blanco construida en MatLab.

Las siguientes gráficas son obtenidas: gráficas del error entre la variable de estado $x(t)$ satisfaciendo la ecuación (19) y el filtro óptimo estimado $m(t)$ satisfaciendo la ecuación (21); gráfica del error entre la variable de estado $x(t)$ satisfaciendo la ecuación (19) y el estimado $m_1(t)$ satisfaciendo la ecuación (23); gráfica del error entre la variable de estado $x(t)$ satisfaciendo la ecuación (19) y el estimado $m_K(t)$ satisfaciendo la ecuación (25). Las gráficas de todos los errores de estimación son mostrados sobre el intervalo de simulación de $t_0 = 0$ a $T = 7,3$ (Fig. 1) y el intervalo de simulación completo de $t_0 = 0$ a $T = 9,2$ (Fig. 2). Puede ser notado que el error dado por el filtro óptimo estimado (21) rápidamente llega hasta y entonces mantiene el valor medio cero aun en una vecindad cerrada del punto asintótico $T = 9,205$, donde la referencia de la variable de estado cuadrática (19) se va a infinito. Por el contrario, los errores dados por los otros filtros considerados llegan hasta cero más lentamente o no lo alcanzan en todo, tiene desviación sistemática (sesgada) desde cero, y claramente diverge a infinito cerca del punto asintótico. Note que la varianza del error del filtrado óptimo $P(t)$ no converge a cero cuando el tiempo tiende al punto asintótico, ya que la dinámica polinomial de cuarto orden es más fuerte que los términos de Riccati cuadráticos en el lado derecho de la ecuación (22).

Así, esto puede ser concluido que el filtro óptimo obtenido (21)–(22) para un estado cuadrático con un ruido multiplicativo cuadrático sobre observaciones lineales produce definitivamente mejores estimados que el filtro óptimo para un estado cuadrático con un ruido independiente de estado o un filtro de Kalman-Bucy extendido convencional.

3.4. Conclusiones

Los resultados de simulación muestran que los valores del estimado calculado por usar el filtro óptimo obtenido para un estado cuadrático con un ruido multiplicativo cuadrático sobre observaciones lineales son notablemente cercanos a los valores reales de la variable de referencia que los valores de los estimados dados por el filtro óptimo para un estado con un ruido independiente de estado o un filtro de Kalman-Bucy extendido convencional.

Además, esto puede ser visto que el error de estimación producido por el filtro óptimo rápidamente llega y entonces mantiene el valor medio cero aun en una vecindad cerrada del tiempo asintótico fijo, donde la referencia de la variable de estado cuadrática (19) tiende a infinito para un tiempo finito. Por el contrario, los errores de estimación dados por los otros dos filtros aplicados diverge a infinito cerca del tiempo asintótico fijo. Este significativo mejoramiento en el comportamiento estimado es obtenido debido a la más cuidadosa elección del filtro de la matriz de ganancia en las ecuaciones (21)–(22), como esto sería en el filtro óptimo. Aunque esta conclusión sigue de la teoría desarrollada, la simulación numérica ayuda como una ilustración convincente.

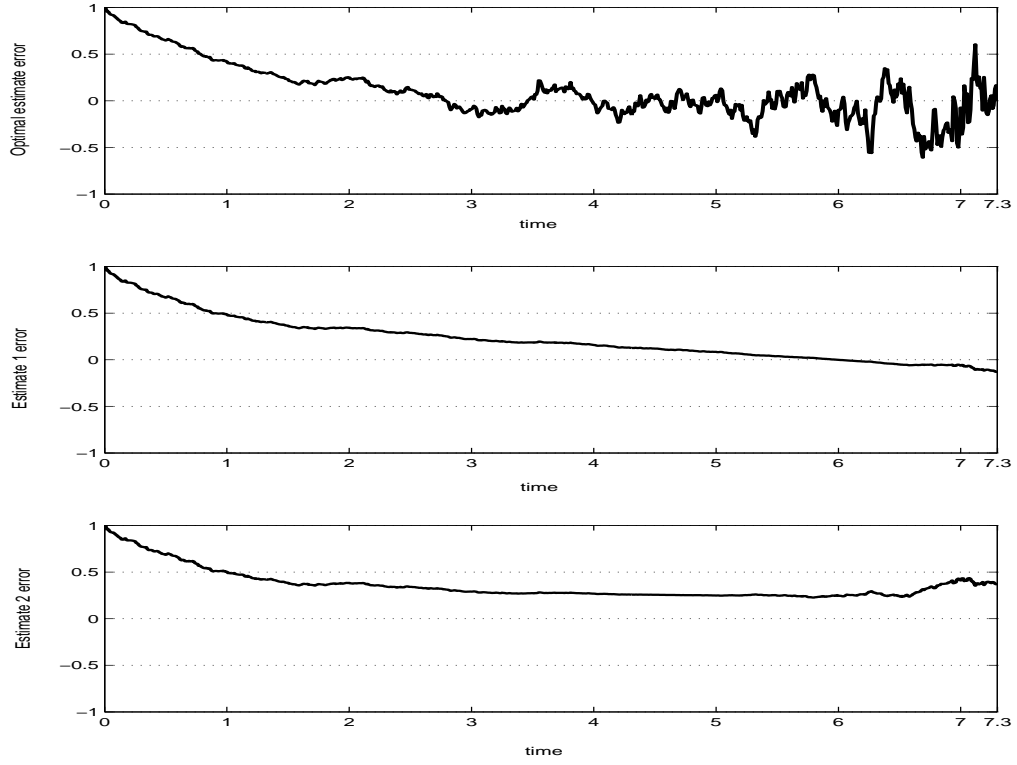


Figura 3.1: Gráfica del error entre el estado real $x(t)$ satisfaciendo la ecuación (19) y el filtro óptimo estimado $m(t)$ satisfaciendo la ecuación (21) (Error Estimado Óptimo), gráfica del error entre el estado real $x(t)$ satisfaciendo la ecuación (19) y el estimado $m_1(t)$ satisfaciendo la ecuación (23) (Error Estimado 1), gráfica del error entre el estado real $x(t)$ satisfaciendo la ecuación (19) y el estimado $m_K(t)$ satisfaciendo la ecuación (25) (Error Estimado 2), sobre el intervalo de simulación $[0, 7,3]$.

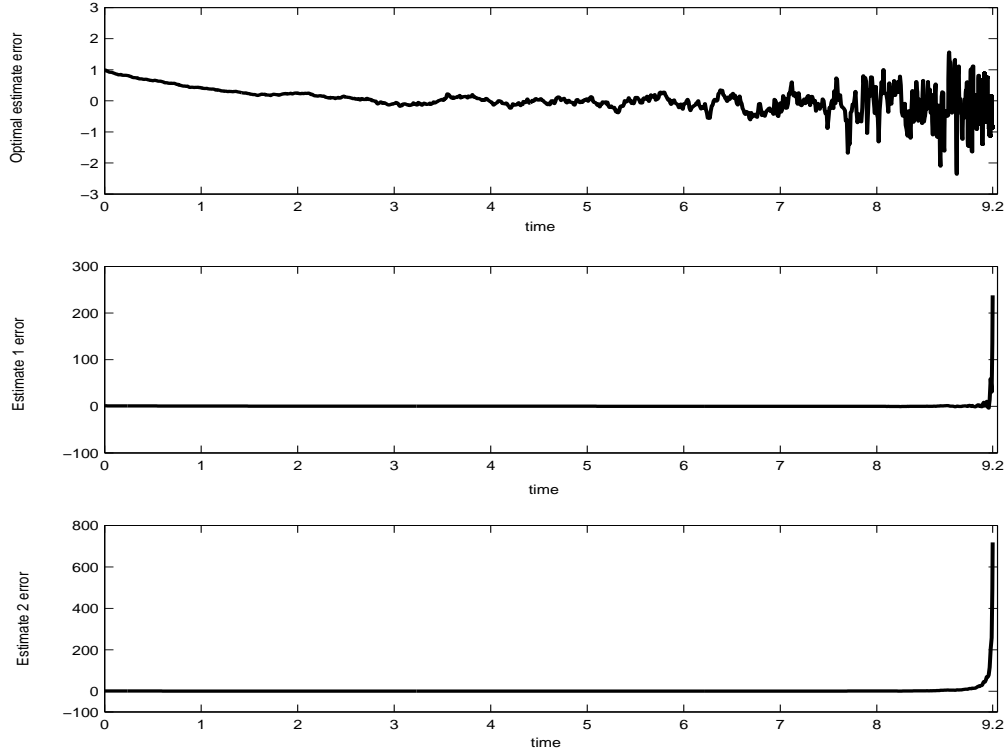


Figura 3.2: Gráfica del error entre el estado real $x(t)$ satisfaciendo la ecuación (19) y el filtro óptimo estimado $m(t)$ satisfaciendo la ecuación (21) (Error Estimado Óptimo), gráfica del error entre el estado real $x(t)$ satisfaciendo la ecuación (19) y el estimado $m_1(t)$ satisfaciendo la ecuación (23) (Error Estimado 1), gráfica del error entre el estado real $x(t)$ satisfaciendo la ecuación (19) y el estimado $m_K(t)$ satisfaciendo la ecuación (25) (Error Estimado 2), sobre el intervalo de simulación completo $[0, 9, 2]$.

Capítulo 4

Filtrado Óptimo para Sistemas Polinomiales Medidos Parcialmente con Ruidos Multiplicativos

4.1. Establecimiento del Problema

Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad completo con una creciente familia real continua de σ -álgebras $F_t, t \geq t_0$, y sea $(W_1(t) = [W_{11}(t), W_{12}(t)], F_t, t \geq t_0)$ y $(W_2(t) = [W_{21}(t), W_{22}(t)], F_t, t \geq t_0)$ procesos independientes de Wiener. El proceso aleatorio F_t -medible $(x(t) = [x_1(t), x_2(t)], y(t) = [y_1(t), y_2(t)])$ es descrito por una ecuación diferencial no lineal con ambos términos polinomiales, el drift y la difusión, para el estado del sistema y una ecuación lineal con coeficientes independientes de estado

$$dx_1(t) = f(x_1, x_2, t)dt + g(x_1, x_2, t)dW_{11}(t), \quad x_1(t_0) = x_{10}, \quad (1)$$

$$dx_2(t) = (a_{20}(t) + a_{21}(t)x_2(t))dt + b_{21}(t)dW_{12}(t), \quad x_2(t_0) = x_{20}, \quad (2)$$

y ecuaciones diferenciales lineales para los procesos de observación

$$dy_1(t) = (A_{01}(t) + A_1(t)x_1(t))dt + B_1(t)dW_{21}(t), \quad (3)$$

$$dy_2(t) = (A_{02}(t) + A_2(t)x_2(t))dt + B_2(t)dW_{22}(t). \quad (4)$$

Aquí, $x(t) = [x_1(t), x_2(t)] \in R^n$ es el vector de estado, $x_1(t) \in R^{n_1}$ es el componente no lineal medido completamente, $x_2(t) \in R^{n_2}$ es uno lineal medido parcialmente, $y(t) = [y_1(t), y_2(t)] \in R^m$ es el vector de observación lineal, tal que el componente $y_1(t) \in R^{n_1}$ corresponde al componente de estado no lineal medido completamente $x_1(t) \in R^{n_1}$, i.e., la matriz $A_1(t) \in R^{n_1 \times n_1}$ es invertible, y $y_2(t) \in R^{m_2}$ corresponde al componente lineal medido parcialmente $x_2(t) \in R^{n_2}$, $m_2 \leq n_2$, i.e., la dimensión de $y_2(t)$ puede ser menor que la de $x_2(t)$. La condición inicial $x_0 \in R^n$ es un vector Gaussiano tal que x_0 , $W_1(t) = [W_{11}(t), W_{12}(t)]$, y $W_2(t) = [W_{21}(t), W_{22}(t)]$ son independientes. Se asume que $B(t)B^T(t)$, donde $B(t) = \text{diag}[B_1(t), B_2(t)]$, es una matriz definida positiva. Todos los coeficientes en (1)–(4) son funciones determinísticas de tiempo de dimensiones apropiadas.

Sin pérdida de generalidad, los componentes del proceso de observación $y_1(t)$ y $y_2(t)$ son tomadas para ser no correlacionadas. Realmente, si $y_1(t)$ y $y_2(t)$ son correlacionadas *a priori*, su correlación mutua puede siempre ser colocar a cero ajustando los términos $A_{01}(t)$ y $A_{02}(t)$ en las ecuaciones (3) y (4) (see [81]).

La función no lineal $f(x_1, x_2, t)$ es considerada una polinomial de n variables, los componentes del vector de estado $x(t) = [x_1(t), x_2(t)] \in R^n$, con coeficientes dependientes del tiempo. Ya que $x(t) \in R^n$ es un vector, esto requiere una definición especial de la polinomial para $n > 1$; algunas de ellas pueden ser encontradas en [23, 24]. En este capítulo, un polinomio de grado p de un vector $x(t) \in R^n$ es considerado como una forma p lineal de n componentes de $x(t)$

$$f(x, t) = a_{10}(t) + a_{11}(t)x + a_{12}(t)xx^T + \dots + a_{1p}(t)x \dots p \text{ times } \dots x, \quad (5)$$

donde $a_{10}(t)$ es un vector de dimensión n , a_{11} es una matriz de dimensión $n \times n$, a_{12} es un tensor 3D de dimensión $n \times n \times n$, a_p es un tensor $(p+1)$ D de dimensión $n \times \dots (p+1) \text{ times } \dots \times n$, y $x \times \dots_p \text{ times } \dots \times x$ es un tensor p D de dimensión $n \times \dots_p \text{ times } \dots \times n$ obtenido por la multiplicación de espacio del vector $x(t)$ por sí mismo p veces. Tal polinomio puede también ser expresado en la forma de sumatoria

$$f_k(x, t) = a_{10 \ k}(t) + \sum_i a_{11 \ ki}(t)x_i(t) + \sum_{ij} a_{12 \ kij}(t)x_i(t)x_j(t) + \dots \\ + \sum_{i_1 \dots i_p} a_{1p \ ki_1 \dots i_p}(t)x_{i_1}(t) \dots x_{i_p}(t), \quad k, i, j, i_1 \dots i_p = 1, \dots, n.$$

El problema de estimación es encontrar el estimado óptimo $\hat{x}(t) = [\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t)]$ del estado del sistema $x(t) = [x_1(t), x_2(t)]$, basado sobre los procesos de observación $Y(t) = \{y(s) = [y_1(s), y_2(s)], 0 \leq s \leq t\}$, que minimice la norma 2 Euclideana

$$J = E[(x(t) - \hat{x}(t))^T(x(t) - \hat{x}(t)) \mid F_t^Y]$$

en cualquier momento de tiempo t . Aquí, $E[z(t) \mid F_t^Y]$ significa la esperanza condicional de un proceso estocástico $z(t) = (x(t) - \hat{x}(t))^T(x(t) - \hat{x}(t))$ con respecto a la σ -álgebra F_t^Y generada por el proceso de observación $Y(t)$ en el intervalo $[t_0, t]$. Como conocido en [63], este estimado óptimo es dado por la esperanza condicional

$$\hat{x}(t) = [\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t)] = m(t) = [m_1(t), m_2(t)] = E(x(t) \mid F_t^Y)$$

del estado del sistema $x(t) = [x_1(t), x_2(t)]$ con respecto a la σ -álgebra F_t^Y generada por el proceso de observación $Y(t)$ en el intervalo $[t_0, t]$.

Como es usual, la función matricial

$$P(t) = E[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T \mid F_t^Y]$$

es la estimación de la varianza del error.

La solución propuesta para este problema de filtrado óptimo es basado sobre las fórmulas para la diferencial de Ito de la esperanza condicional $E(x(t) | F_t^Y)$ y su varianza $P(t)$ (mencionada antes [63]) y dada en la sección siguiente.

4.2. Diseño del Filtro Óptimo

Las ecuaciones de filtrado óptimo podrían ser obtenidas usando la fórmula para la diferencial de Ito de la esperanza condicional $m(t) = E(x(t) | F_t^Y)$ (ver [63])

$$dm(t) = E(\bar{f}(x, t) | F_t^Y)dt + E(x[\varphi_1(x) - E(\varphi_1(x) | F_t^Y)]^T | F_t^Y) \times \\ (B(t)B^T(t))^{-1}(dy(t) - E(\varphi_1(x) | F_t^Y)dt),$$

donde $\bar{f}(x, t) = [f(x, t), a_{20}(t) + a_{21}(t)x_2(t)]$ es el término drift polinomial en la ecuación de estado completo, $f(x, t)$ es el término drift polinomial en la ecuación (1), y $\varphi_1(x)$ es el término drift lineal en la ecuación de observación completa igual a $\varphi_1(x) = A_0(t) + A(t)x(t)$, donde $A_0(t) = [A_{01}(t), A_{02}(t)]$ y $A(t) = \text{diag}[A_1(t), A_2(t)]$. Una vez sustituyendo las expresiones para φ_1 , la ecuación del estimado toma la forma

$$dm(t) = E(\bar{f}(x, t) | F_t^Y)dt + E(x(t)[A(t)(x(t) - m(t))]^T | F_t^Y) \times \\ (B(t)B^T(t))^{-1}(dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t))dt) = \\ E(\bar{f}(x, t) | F_t^Y)dt + E(x(t)(x(t) - m(t))^T | F_t^Y)A^T(t) \times \\ (B(t)B^T(t))^{-1}(dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t))dt) = \\ E(\bar{f}(x, t) | F_t^Y)dt + P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}(dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t))dt). \quad (6)$$

La ecuación (6) será complementada con la condición inicial $m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y)$.

Para formar un sistema cerrado de las ecuaciones de filtrado, la ecuación (6) será complementada con la ecuación para la varianza del error $P(t)$. Para este propósito, la fórmula para la diferencial de Ito de la varianza $P(t) = E((x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y)$ será usada (véase [63]):

$$\begin{aligned} dP(t) = & (E((x(t) - m(t))(\bar{f}(x, t))^T | F_t^Y) + \\ & E(\bar{f}(x, t)(x(t) - m(t))^T | F_t^Y) + E(\bar{g}(x, t)\bar{g}^T(x, t) | F_t^Y) - \\ & E(x(t)[\varphi_1(x) - E(\varphi_1(x) | F_t^Y)]^T | F_t^Y)(B(t)B^T(t))^{-1}E([\varphi_1(x) - E(\varphi_1(x) | F_t^Y)]x^T(t) | F_t^Y))dt + \\ & E((x(t) - m(t))(x(t) - m(t))[\varphi_1(x) - E(\varphi_1(x) | F_t^Y)]^T | F_t^Y) \times \\ & (B(t)B^T(t))^{-1}(dy(t) - E(\varphi_1(x) | F_t^Y)dt), \end{aligned}$$

donde $\bar{g}(x, t) = [g(x, t), b_{21}(t)]$ es el término difusión polinomial (ruido multiplicativo) en la ecuación de estado completa, $g(x, t)$ es el término difusión polinomial en la ecuación (1), y el último término será entendido como un tensor 3D (bajo el signo de la esperanza) convolucionada con un vector, el cual produce una matriz. Una vez sustituyendo las expresiones para φ_1 , la última fórmula toma la forma

$$\begin{aligned} dP(t) = & (E((x(t) - m(t))(\bar{f}(x, t))^T | F_t^Y) + \\ & E(\bar{f}(x, t)(x(t) - m(t))^T | F_t^Y) + E(\bar{g}(x, t)\bar{g}^T(x, t) | F_t^Y) - \\ & (E(x(t)(x(t) - m(t))^T | F_t^Y)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)E((x(t) - m(t))x^T(t) | F_t^Y))dt + \\ & E((x(t) - m(t))(x(t) - m(t))(A(t)(x(t) - m(t)))^T | F_t^Y)(B(t)B^T(t))^{-1} \times \\ & (dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t))dt). \end{aligned}$$

Usando la fórmula de la varianza $P(t) = E((x(t) - m(t))x^T(t) | F_t^Y)$, la última ecuación puede ser representada como

$$dP(t) = (E((x(t) - m(t))(\bar{f}(x, t))^T | F_t^Y) + \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
& E(\bar{f}(x, t)(x(t) - m(t))^T | F_t^Y) + E(\bar{g}(x, t)\bar{g}^T(x, t) | F_t^Y) - \\
& P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t)dt + E(((x(t) - m(t))(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y) \times \\
& A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}(dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t))dt).
\end{aligned}$$

La ecuación (7) será complementada con la condición inicial

$$P(t_0) = E[(x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y].$$

Las ecuaciones (6) y (7) para el estimado óptimo $m(t)$ y la varianza del error $P(t)$ forma un sistema abierto de las ecuaciones de filtrado para el estado no lineal (1), (2) sobre observaciones lineales (3), (4). Probaremos ahora que este sistema se convierte en un sistema cerrado de las ecuaciones de filtrado en vista de las propiedades polinomiales de las funciones $f(x, t)$ y $g(x, t)$ en la ecuación (1).

Como es mostrado en [23, 24], un sistema cerrado de las ecuaciones de filtrado para un estado polinomial sobre observaciones lineales puede ser obtenida si la matriz de observación $A(t)$ es invertible para cualquier $t \geq t_0$. Esta condición implica ([23, 24]) que la variable aleatoria $x(t) - m(t)$ es condicionalmente Gaussiana con respecto al proceso de observación $y(t)$ para cualquier $t \geq t_0$.

En las ecuaciones de observación consideradas (3), (4), sólo la matriz $A_1(t)$ en (3) es invertible, considerando que la matriz $A_2(t)$ en (4) no lo es. Sin embargo, los componentes de la variable del error $x_1(t) - m_1(t)$, $m_1(t) = E[x_1(t) | F_t^Y]$, correspondiendo a $A_1(t)$ en (3) forma un vector condicionalmente Gaussiano con respecto al proceso de observación completo $y(t) = [y_1(t), y_2(t)]$, ya que los componentes del proceso de observación $y_1(t)$ y $y_2(t)$ son no correlacionados (por suposición) y el proceso de innovación $y_1(t) - \int_{t_0}^t (A_{01}(s) + A_1(s)m_1(s))ds$ es condicionalmente Gaussiano con respecto a $y_1(t)$ ([23, 24, 62]). Los componentes de la variable del error $x_2(t) - m_2(t)$, $m_2(t) = E[x_2(t) | F_t^Y]$, correspondiendo a $A_2(t)$ en (4) también forma un vector condicionalmente Gaussiano con respecto al proceso de observación completo $y(t) = [y_1(t), y_2(t)]$, ya que $x_2(t)$ es Gaussiano y los

componentes del proceso de observación $y_1(t)$ y $y_2(t)$ son no correlacionados. Así, el vector del estado completo $x(t) - m(t) = [x_1(t) - m_1(t), x_2(t) - m_2(t)]$ es condicionalmente Gaussiano con respecto al proceso de observación completo $y(t) = [y_1(t), y_2(t)]$ (ver [81]), y, por lo tanto, las siguientes consideraciones apuntadas en [23, 24, 62] son aplicables.

Primero, ya que la variable aleatoria $x(t) - m(t)$ es condicionalmente Gaussiana, el tercer momento condicional $E((x(t) - m(t))(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y)$ de $x(t) - m(t)$ con respecto a observaciones, la cual se coloca en el último término de la ecuación (7), es igual a cero, porque el proceso $x(t) - m(t)$ es condicionalmente Gaussiano. Así, el último término total en (7) es desaparecido y la siguiente ecuación de la varianza es obtenida

$$dP(t) = (E((x(t) - m(t))(\bar{f}(x, t))^T | F_t^Y) + E(\bar{f}(x, t)(x(t) - m(t))^T | F_t^Y) + \quad (8)$$

$$+ E(\bar{g}(x, t)\bar{g}^T(x, t) | F_t^Y) - P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t))dt,$$

con la condición inicial $P(t_0) = E[(x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y]$.

Segundo, si las funciones $\bar{f}(x, t)$ y $\bar{g}(x, t)$ son funciones polinomiales del estado x con coeficientes dependientes del tiempo, las expresiones de los términos $E(\bar{f}(x, t) | F_t^Y)$ en (4) y $E((x(t) - m(t))\bar{f}^T(x, t) | F_t^Y)$ y $E(\bar{g}(x, t)\bar{g}^T(x, t) | F_t^Y)$ en (6) podría incluir también sólo términos polinomiales de x . Entonces, esos términos polinomiales pueden ser representados como funciones de $m(t)$ y $P(t)$ usando la propiedad siguiente de variable aleatoria Gaussiana $x(t) - m(t)$: todos sus momentos condicionales impares, $m_1 = E[(x(t) - m(t)) | Y(t)]$, $m_3 = E[(x(t) - m(t))^3 | Y(t)]$, $m_5 = E[(x(t) - m(t))^5 | Y(t)]$, ... son iguales a cero 0, y todos sus momentos condicionales pares $m_2 = E[(x(t) - m(t))^2 | Y(t)]$, $m_4 = E[(x(t) - m(t))^4 | Y(t)]$, ... pueden ser representados como funciones de la varianza $P(t)$. Por ejemplo, $m_2 = P$, $m_4 = 3P^2$, $m_6 = 15P^3$, ... etc. Después de la representación de todos los términos polinomiales en (4) y (6), que son generados al expresar $E(\bar{f}(x, t) | F_t^Y)$, $E((x(t) - m(t))\bar{f}^T(x, t) | F_t^Y)$, y $E(\bar{g}(x, t)\bar{g}^T(x, t) | F_t^Y)$, como funciones

de $m(t)$ y $P(t)$, una forma cerrada de las ecuaciones de filtrado podría ser obtenida. Las representaciones correspondientes de $E(f(x, t) \mid F_t^Y)$ y $E((x(t) - m(t))(f(x, t))^T \mid F_t^Y)$ han sido desarrolladas en [23, 24] para ciertas funciones polinomiales $f(x, t)$.

En las próximas subsecciones, una forma cerrada de las ecuaciones de filtrado será obtenida de (4) y (6) para funciones bilineales $f(x, t)$ y $g(x, t)$ en la ecuación (1). Será notado, sin embargo, que la aplicación del mismo procedimiento resultará en el diseño de un sistema cerrado de las ecuaciones de filtrado para cualesquiera funciones polinomiales $f(x, t)$ y $g(x, t)$ en (1).

4.2.1. Sistemas Bilineales

Sean las funciones

$$f(x, t) = a_{10}(t) + a_{11}(t)x + a_{12}(t)xx^T \quad (12)$$

y

$$g(x, t) = b_{10}(t) + b_{11}(t)x + b_{12}(t)xx^T \quad (13)$$

polinomiales bilineales, donde x es un vector n -dimensional, $a_{10}(t)$ es un vector n -dimensional, $a_{11}(t)$ y $b_{10}(t)$ son matrices de dimensión $n \times n$, $a_{12}(t)$ y $b_{11}(t)$ son tensores 3D de dimensión $n \times n \times n$, y $b_{12}(t)$ es un tensor 4D de dimensión $n \times n \times n \times n$. En este caso, las representaciones para $E(\bar{f}(x, t) \mid F_t^Y)$, $E((x(t) - m(t))(\bar{f}(x, t))^T \mid F_t^Y)$, y $E(\bar{g}(x, t)\bar{g}^T(x, t) \mid F_t^Y)$ como funciones de $m(t)$ y $P(t)$ son derivadas como sigue(ver [23, 24, 62])

$$E(\bar{f}(x, t) \mid F_t^Y) = a_0(t) + a_1(t)m(t) + a_2(t)m(t)m^T(t) + a_2(t)P(t), \quad (10)$$

$$E(\bar{f}(x, t)(x(t) - m(t))^T \mid F_t^Y) + E((x(t) - m(t))(\bar{f}(x, t))^T \mid F_t^Y) = \quad (11)$$

$$a_1(t)P(t) + P(t)a_1^T(t) + 2a_2(t)m(t)P(t) + 2(a_2(t)m(t)P(t))^T.$$

$$E(\bar{g}(x, t)\bar{g}^T(x, t) \mid F_t^Y) = b_0(t)b_0^T(t) + b_0(t)(b_1(t)m(t))^T + \quad (12)$$

$$(b_1(t)m(t))b_0^T(t) + b_1(t)P(t)b_1^T(t) + b_1(t)m(t)m^T(t)b_1^T(t) +$$

$$b_0(t)(P(t) + m(t)m^T(t))b_2^T(t) + b_2(t)(P(t) + m(t)m^T(t))b_0^T(t) +$$

$$b_1(t)(3m(t)P(t) + m(t)(m(t)m^T(t)))b_2^T(t) + b_2(t)(3P(t)m^T(t) + (m(t)m^T(t))m^T(t))b_1^T(t) +$$

$$3b_2(t)P^2(t)b_2^T(t) + 3b_2(t)(P(t)m(t)m^T(t) + m(t)m^T(t)P(t))b_2^T(t) + b_2(t)(m(t)m^T(t))^2b_2^T(t).$$

donde $a_0(t) = [a_{10}(t), a_{20}(t)]$, $a_1(t) = \text{diag}[a_{11}(t), a_{21}(t)]$, $b_0(t) = \text{diag}[b_{10}(t), b_{21}(t)]$; a_2 es un tensor 3D de dimensión $n \times n \times n$ definida como $a_{2 \ kij} = a_{12 \ kij}$, si $k \leq n_1$, y $a_{2 \ kij} = 0$, de otro modo; b_1 es un tensor 3D de dimensión $n \times n \times n$ definida como $b_{1 \ kij} = b_{11 \ kij}$, si $k \leq n_1$, y $a_{2 \ kij} = 0$, de otro modo; b_2 es un tensor 3D de dimensión $n \times n \times n \times n$ definida como $b_{2 \ mkij} = b_{12 \ mkij}$, si $m \leq n_1$, y $a_{2 \ mkij} = 0$, de otro modo; $b_1^T(t)$ denota el tensor obtenido de $b_1(t)$ por transponer sus dos índices derechos.

Sustituyendo la expresión (10) en (6) y las expresiones (11),(12) en (8), las ecuaciones de filtrado para el estimado óptimo $m(t) = [m_1(t), m_2(t)]$ del estado bilineal $x(t) = [x_1(t), x_2(t)]$ y la varianza del error $P(t)$ son obtenidas

$$dm(t) = (a_0(t) + a_1(t)m(t) + a_2(t)m(t)m^T(t) + a_2(t)P(t))dt + \quad (13)$$

$$P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}[dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t))dt], \quad m(t_0) = E(x(t_0) \mid F_t^Y),$$

$$dP(t) = (a_1(t)P(t) + P(t)a_1^T(t) + 2a_2(t)m(t)P(t) + 2(a_2(t)m(t)P(t))^T + \quad (14)$$

$$b_0(t)b_0^T(t) + b_0(t)(b_1(t)m(t))^T + (b_1(t)m(t))b_0^T(t) + b_1(t)P(t)b_1^T(t) +$$

$$b_1(t)m(t)m^T(t)b_1^T(t) + b_0(t)(P(t) + m(t)m^T(t))b_2^T(t) +$$

$$b_2(t)(P(t) + m(t)m^T(t))b_0^T(t) + b_1(t)(3m(t)P(t) + m(t)(m(t)m^T(t)))b_2^T(t) +$$

$$b_2(t)(3P(t)m^T(t) + (m(t)m^T(t))m^T(t))b_1^T(t) + 3(b_2(t)P(t))(b_2(t)P(t))^T +$$

$$\begin{aligned}
& 3b_2(t)(P(t)m(t)m^T(t) + m(t)m^T(t)P(t))b_2^T(t) + \\
& (b_2(t)(m(t)m^T(t)))(b_2(t)(m(t)m^T(t)))^T dt - P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t)dt. \\
& P(t_0) = E((x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_t^Y).
\end{aligned}$$

Mediante la derivación precedente, el siguiente resultado es demostrado.

Teorema 1. El filtro óptimo de dimensión finita para el estado bilineal (1),(2) con parte lineal medida parcialmente (2), donde el polinomio cuadrático $f(x, t)$ es definido por (9), sobre las observaciones lineales (3),(4), es dada por la ecuación (13) para el estimado óptimo $m(t) = E(x(t) | F_t^Y)$ y la ecuación (14) para la varianza del error de estimación $P(t) = E[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y]$.

Así, basada sobre el sistema general no cerrado de las ecuaciones de filtrado (6),(7), es probado que el sistema cerrado de las ecuaciones de filtrado (6),(8) puede ser obtenida para cualquier estado polinomial (1),(2) con parte lineal medida parcialmente (2) y ruido polinomial multiplicativo sobre observaciones lineales (3),(4). Además, la forma específica (13),(14) del sistema cerrado de las ecuaciones de filtrado correspondiendo a un estado bilineal es derivado. En la próxima sección, como un ejemplo, el filtro óptimo diseñado para un estado bilineal con parte lineal medida parcialmente y ruido multiplicativo bilineal sobre observaciones lineales es aplicado para resolver el problema de filtrado óptimo con el sensor cúbico, establecido en [82], con una condición inicial de estado Gaussiana.

4.3. Problema de Filtrado Óptimo con el Sensor Cúbico

Esta sección presenta un ejemplo de diseñar el filtro óptimo para el problema de filtrado óptimo con el sensor cúbico, establecido en [82], donde una condición inicial de estado

Gaussiana es asumida adicionalmente, reduciéndolo al problema de filtrado óptimo para un estado bilineal con parte lineal medida parcialmente y ruido multiplicativo bilineal sobre observaciones lineales.

Sea el estado escalar no medible $x(t)$ satisfaciendo la ecuación lineal trivial

$$dx(t) = dw_1(t), \quad x(0) = x_0, \quad (15)$$

y el proceso de observación dado por la ecuación escalar del sensor cúbico

$$dy(t) = x^3(t)dt + dw_2(t), \quad (16)$$

donde $w_1(t)$ y $w_2(t)$ son procesos de Wiener estandar independientes uno de otro y de una variable aleatoria Gaussiana x_0 que sirve como la condición inicial en (15). El problema de filtrado es encontrar el estimado óptimo para el estado lineal (15), usando las observaciones del sensor cúbico (16).

Reformularemos el problema, introduciendo el proceso estocástico $z(t) = x^3(t)$. Usando la fórmula de Ito (ver [63]) para la diferencial estocástico de la función cúbica $x^3(t)$, donde $x(t)$ satisface la ecuación (15), la siguiente ecuación es obtenida para $z(t)$

$$dz(t) = 3x(t)dt + 3x^2(t)dt + 3x^2(t)dw_1(t), \quad z(0) = z_0. \quad (17)$$

Note que la adición $3x(t)dt$ aparece en vista de la segunda derivada en x en la fórmula de Ito. La condición inicial $z_0 \in R^n$ es considerado un vector aleatorio Gaussiano. Esta suposición es completamente aceptable en el sistema de filtrado, ya que las distribuciones reales de $x(t)$ y $z(t)$ son en realidad desconocidas. En términos del proceso $z(t)$, la ecuación de observación (16) toma la forma

$$dy(t) = z(t)dt + dw_2(t). \quad (18)$$

El sistema de filtrado obtenido incluye dos ecuaciones, (17) y (15), para el estado medido parcialmente $[z(t), x(t)]$ y una ecuación (18) para las observaciones $y(t)$, donde

$z(t)$ es un estado cuadrático medido completamente con ruido cuadrático multiplicativo, $x(t)$ es un estado lineal no medido, y $y(t)$ es un proceso de observación lineal directamente midiendo el estado $z(t)$. De aquí, el filtro óptimo diseñado puede ser aplicado para resolver este problema. Las ecuaciones de filtrado (13), (14) toman la siguiente forma particular para el sistema (17), (15), (18)

$$dm_1(t) = (3m_2(t) + 3m_2^2(t) + 3P_{22}(t))dt + P_{11}(t)[dy(t) - m_1(t)dt], \quad (19)$$

$$dm_2(t) = P_{12}(t)[dy(t) - m_1(t)dt], \quad (20)$$

con las condiciones iniciales $m_1(0) = E(x_0 | y(0)) = m_{10}$ y $m_2(0) = E(x_0^3 | y(0)) = m_{20}$,

$$\dot{P}_{11}(t) = 12(P_{12}(t)m_2(t)) + 6P_{12}(t) + 27P_{22}^2(t) + 27P_{22}(t)m_2^2(t) + 9m_2^4(t) - P_{11}^2(t), \quad (21)$$

$$\dot{P}_{12}(t) = 6(P_{22}(t)m_2(t)) + 3P_{22}(t) + 3(m_2^2(t) + P_{22}(t)) - P_{11}(t)P_{12}(t), \quad (22)$$

$$\dot{P}_{22}(t) = 1 - P_{12}^2(t), \quad (23)$$

con la condición inicial $P(0) = E((x_0, x_0^3)^T - m(0))(x_0, x_0^3)^T - m(0))^T | y(0)) = P_0$. Aquí, $m_1(t)$ es el estimado óptimo para el estado $z(t) = x^3(t)$ y $m_2(t)$ es el estimado óptimo para el estado $x(t)$.

Los resultados de simulación numérica son obtenidos resolviendo los sistemas de ecuaciones de filtrado (19)–(23). Los valores obtenidos del estimado $m_2(t)$ satisfaciendo la ecuación (20) son comparados con los valores reales de la variable de estado $x(t)$ en (15).

Para el filtro (19)–(23) y el sistema de referencia (17), (15), (18) involucrados en la simulación, los siguientes valores iniciales son asignados: $x_0 = 0$, $m_{20} = 10$, $m_{10} = 1000$, $P_{011} = 15$, $P_{012} = 3$, $P_{022} = 1$. Perturbaciones Gaussianas $dw_1(t)$ y $dw_2(t)$ son realizadas usando las funciones de ruido blanco construidas en MatLab. El intervalo de simulación es $[0, 0.05]$.

La Figura 1 muestra las gráficas de la variable de estado $x(t)$ (15) y su estimado óptimo $m_2(t)$ (20), tan bien como los procesos de observación $y(t)$ (16), en el intervalo de simulación total de $t_0 = 0$ a $T = 0,05$. Puede ser observado que el estimado óptimo dado por (19)–(23) converge al estado real (15) muy rápidamente, a pesar de un error considerable en las condiciones iniciales, $m_{20} - x_0 = 10$, $m_{10} - z(0) = 1000$, y observaciones muy ruidosas las cuales no reproducen aún la forma de $z(t) = x^3(t)$. Además, la señal estimada $x(t)$ en sí mismo es un proceso de Wiener, i.e., la integral de un ruido blanco Gaussiano, la cual hace el problema de filtrado aun más difícil. Será notado también que el filtro de Kalman extendido (EKF) falla al aproximarse para el sistema (15), (16), ya que el valor linealizado de $x^3(t)$ en cero es la constante valuada cero, por lo tanto, el proceso de observación consistiría de puros ruidos.

Así, puede ser concluido que el filtro óptimo obtenido (19)–(23) resuelve el problema de filtrado óptimo del sensor cúbico ([82]) y produce un estimado realmente bueno del estado no medido en presencia de condiciones de observación muy complicadas.

4.4. Conclusión

Este capítulo presenta el filtro óptimo para sistemas de estado polinomial con ruido multiplicativo polinomial y parte lineal medida parcialmente sobre observaciones lineales. Es mostrado que el filtro óptimo puede ser obtenido en una forma cerrada para cualquier estado polinomial y cualquier ruido multiplicativo polinomial; para estado bilineal y ruido multiplicativo bilineal, el filtro óptimo en forma cerrada es explícitamente derivado en el Teorema 1. Basada sobre el filtro óptimo para un estado bilineal, la solución óptima es obtenida para el problema de filtrado óptimo del sensor cúbico, asumiendo una condición inicial Gaussiana para el estado extendido. El filtro resultante produce una convergencia

rápida y segura, a pesar de una diferencia significativa en las condiciones iniciales entre el estado y el estimado y varias observaciones ruidosas, en la situación donde el estado no medido en sí mismo es un proceso de Wiener y el filtro de Kalman extendido (EKF) al aproximarse falla. Aunque esta conclusión sigue de la teoría desarrollada, la simulación numérica sirve como una ilustración convincente.

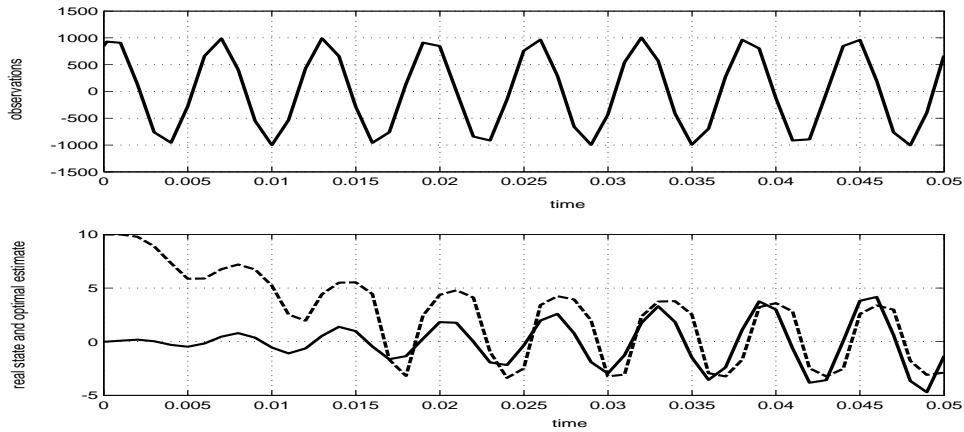


Figura 4.1: **Arriba.** Gráfica del proceso de observación $y(t)$ en el intervalo $[0, 0,05]$. **Abajo.** Gráficas del estado real $x(t)$ (línea sólida) y su estimado óptimo $m_2(t)$ (línea punteada) en el intervalo $[0, 0,05]$.

Capítulo 5

Filtrado de Estado Óptimo e Identificación de Parámetros para Sistemas Lineales

5.1. Problema de Filtrado para Estado Lineal con Parámetros Desconocidos sobre Observaciones Lineales

Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad completo con una creciente familia real continua de σ -álgebras $F_t, t \geq t_0$, y sean $(W_1(t), F_t, t \geq t_0)$ y $(W_2(t), F_t, t \geq t_0)$ procesos independientes de Wiener.

El proceso aleatorio F_t medible $(x(t), y(t))$ es descrito por una ecuación diferencial lineal con un parámetro vectorial desconocido θ para el sistema de estado vectorial

$$dx(t) = (a_0(\theta, t) + a(\theta, t)x(t))dt + b(t)dW_1(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

y una ecuación diferencial lineal para los procesos de observación

$$dy(t) = (A_0(t) + A(t)x(t))dt + B(t)dW_2(t). \quad (2)$$

Aquí, $x(t) \in R^n$ es el vector de estado, $y(t) \in R^n$ es el vector de observación lineal, tal que la matriz de observación $A(t) \in R^{n \times n}$ es invertible, y $\theta(t) \in R^p$, $p \leq n \times n + n$, es el vector entradas desconocidas de la matriz $a(\theta, t)$ y componentes desconocidos del vector $a_0(\theta, t)$. Esto significa que ambas estructuras contienen componentes desconocidos $a_{0_i}(t) = \theta_k(t)$, $k = 1, \dots, p_1 \leq n$ y $a_{ij}(t) = \theta_k(t)$, $k = p_1 + 1, \dots, p \leq n \times n + n$, así como componentes conocidos $a_{0_i}(t)$ y $a_{ij}(t)$, cuyos valores son funciones conocidas de tiempo. La condición inicial $x_0 \in R^n$ es un vector Gaussiano tal que x_0 , $W_1(t)$, y $W_2(t)$ son independientes. Es asumido que $B(t)B^T(t)$ es una matriz definida positiva (ver [63] para más comentarios sobre esta condición). Todos los coeficientes en (1)–(2) son funciones determinísticas de tiempo de dimensiones apropiadas.

Esto es considerado que no hay información útil sobre valores de los parámetros desconocidos θ_k , $k = 1, \dots, p$, y esta incertidumbre también crece cuando el tiempo tiende a infinito. En otras palabras, los parámetros desconocidos pueden ser modelados como procesos de Wiener F_t medibles

$$d\theta(t) = dW_3(t), \quad (3)$$

con condiciones iniciales desconocidas $\theta(t_0) = \theta_0 \in R^p$, donde $(W_3(t), F_t, t \geq t_0)$ es un proceso de Wiener independiente de x_0 , $W_1(t)$, y $W_2(t)$.

El problema de estimación es encontrar el estimado óptimo $\hat{z}(t) = [\hat{x}(t), \hat{\theta}(t)]$ del vector combinado del sistema de estados y parámetros desconocidos $z(t) = [x(t), \theta(t)]$, basado sobre los procesos de observación $Y(t) = \{y(s), 0 \leq s \leq t\}$. Como es conocido [63], este estimado óptimo es dado por la esperanza condicional

$$\hat{z}(t) = m(t) = E(z(t) | F_t^Y)$$

del sistema de estado $z(t) = [x(t), \theta(t)]$ con respecto a la σ -álgebra F_t^Y generada por el proceso de observación $Y(t)$ en el intervalo $[t_0, t]$. Como es usual, la función matricial

$$P(t) = E[(z(t) - m(t))(z(t) - m(t))^T | F_t^Y]$$

es la varianza del error de estimación.

La solución propuesta para este problema de filtrado óptimo es basado sobre las ecuaciones de filtrado óptimo para estados polinomiales lineales con la parte lineal medida parcialmente sobre observaciones lineales, las cuales han sido recientemente obtenidas en [62]. Note que la invertibilidad de la matriz de observación A en (2) es una condición obligatoria para aplicar los resultados de [62] y obtener una solución cerrada de dimensión finita al problema establecido, la cual no puede ser omitida.

5.2. Filtro Óptimo e Identificador para Estado Lineal con Parámetros Vectoriales Desconocidos sobre Observaciones Lineales

Para aplicar las ecuaciones de filtrado óptimo al vector de estado $z(t) = [x(t), \theta(t)]$, gobernado por las ecuaciones (1) y (3), sobre las observaciones lineales (2) (ver [62]), la ecuación de estado (1) será escrita en la forma polinomial. Para este propósito, la matriz $a_1(t) \in R^{(n+p) \times (n+p)}$, un tensor cúbico $a_2(t) \in R^{(n+p) \times (n+p) \times (n+p)}$, y un $c_0(t) \in R^{(n+p)}$ son introducidos como sigue.

La ecuación para la i -ésima componente del vector de estado es dada por

$$dx_i(t) = (a_{0i}(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j(t))dt + \sum_{j=1}^n b_{ij}(t)dW_{1j}(t), \quad x_i(t_0) = x_{0i}.$$

Entonces:

1. Si la variable $a_{0_i}(t)$ es una función conocida, entonces la i -ésima componente del vector $c_0(t)$ es colocar esta función, $c_{0_i}(t) = a_{0_i}(t)$; de otra manera, si la variable $a_{0_i}(t)$ es una función desconocida, entonces la $(i, n+i)$ -ésima entrada de la matriz $a_1(t)$ es colocar 1.

2. Si la variable $a_{ij}(t)$ es una función conocida, entonces la (i, j) -ésima componente de la matriz $a_1(t)$ es colocar esta función, $a_{1_{ij}}(t) = a_{ij}(t)$; de otra manera, si la variable $a_{ij}(t)$ es una función desconocida, entonces la $(i, p_1 + k, j)$ -ésima entrada del tensor cúbico $a_2(t)$ es colocar 1, donde k es el número de esta actual entrada desconocida en la matriz $a_{ij}(t)$, contando las entradas desconocidas por consiguiente por filas de la primera a la n -ésima entrada en cada fila.

3. Todas las otras entradas no asignadas de la matriz $a_1(t)$, tensor cúbico $a_2(t)$, y vector $c_0(t)$ son colocadas 0.

Usando la notación introducida, las ecuaciones de estado (1),(3) para el vector $z(t) = [x(t), \theta(t)] \in R^{n+p}$ pueden ser reescritas como

$$dz(t) = (c_0(t) + a_1(t)z(t) + a_2(t)z(t)z^T(t))dt + \text{diag}[b(t), I_{p \times p}]d[W_1^T(t), W_3^T(t)]^T, \quad (4)$$

$$z(t_0) = [x_0, \theta_0],$$

donde la matriz $a_1(t)$, tensor cúbico $a_2(t)$, y vector $c_0(t)$ ya han sido definidos, e $I_{p \times p}$ es la matriz identidad de dimensión $p \times p$. La ecuación (4) es bilineal con respecto al vector de estado extendido $z(t) = [x(t), \theta(t)]$.

De este modo, el problema de estimación es ahora reformulado como para encontrar el estimado óptimo $\hat{z}(t) = m(t) = [\hat{x}(t), \hat{\theta}(t)]$ para el vector de estado $z(t) = [x(t), \theta(t)]$, gobernado por la ecuación bilineal (4), basada sobre los procesos de observación $Y(t) = \{y(s), 0 \leq s \leq t\}$, satisfaciendo la ecuación (2). La solución de este problema es obtenida usando las ecuaciones de filtrado óptimo para estados lineales-bilineales con la parte lineal

medida parcialmente sobre observaciones lineales, recientemente obtenida en [62], y es dada por

$$dm(t) = (c_0(t) + a_1(t)m(t) + a_2(t)m(t)m^T(t) + a_2(t)P(t))dt + \quad (5)$$

$$P(t)[A(t), 0_{m \times p}]^T (B(t)B^T(t))^{-1} [dy(t) - A(t)m(t)dt],$$

$$m(t_0) = [E(x(t_0) | F_t^Y), E(\theta(t_0) | F_t^Y)],$$

$$dP(t) = (a_1(t)P(t) + P(t)a_1^T(t) + 2a_2(t)m(t)P(t) + 2(a_2(t)m(t)P(t))^T + \quad (6)$$

$$(diag[b(t), I_p])(diag[b(t), I_p]^T))dt -$$

$$P(t)[A(t), 0_{m \times p}]^T (B(t)B^T(t))^{-1} [A(t), 0_{m \times p}]P(t)dt,$$

$$P(t_0) = E((z(t_0) - m(t_0))(z(t_0) - m(t_0))^T | F_t^Y),$$

donde $0_{m \times p}$ es la matriz cero de dimensión $m \times p$; $P(t)$ es la varianza condicional del error de estimación $z(t) - m(t)$ con respecto a las observaciones $Y(t)$.

Por el significado de la deducción anterior, el siguiente resultado es demostrado.

Teorema 1. El filtro óptimo finito dimensional para el vector de estado extendido $z(t) = [x(t), \theta(t)]$, gobernado por la ecuación (4), sobre las observaciones lineales (2) es dado por la ecuación (5) para el estimado óptimo $\hat{z}(t) = m(t) = [\hat{x}(t), \hat{\theta}(t)] = E([x(t), \theta(t)] | F_t^Y)$ y la ecuación (6) para la varianza del error de estimación $P(t) = E[(z(t) - m(t))(z(t) - m(t))^T | F_t^Y]$. Este filtro, aplicado al subvector $\theta(t)$, también sirve como el identificador óptimo para el vector de parámetros desconocidos $\theta(t)$ en la ecuación (1), produciendo el subvector estimado $\hat{\theta}(t)$ como el estimado óptimo del vector de parámetros.

De este modo, basado sobre las ecuaciones de filtrado óptimo general para estados lineales-bilineales con la parte lineal medida parcialmente sobre observaciones lineales, el filtro óptimo de estado y el identificador óptimo de parámetros son obtenidos para el estado del sistema lineal (1) con parámetros desconocidos, modelados por (3), sobre las observaciones lineales (2).

5.3. Ejemplo

Esta sección presenta un ejemplo de diseñar el filtro e identificador óptimo para un sistema lineal con un parámetro multiplicativo desconocido, basado sobre el estado lineal medible.

Sea el sistema de estado $x(t)$ satisface la ecuación lineal con un parámetro desconocido θ

$$\dot{x}(t) = \theta x(t) + \psi_1(t), \quad x(0) = x_0, \quad (7)$$

y el proceso de observación dado por la ecuación

$$y(t) = x(t) + \psi_2(t), \quad (8)$$

donde $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$ son ruidos blancos Gaussianos, los cuales son las derivadas en promedio cuadrático débiles de procesos de Wiener estandares (ver [63]). Las ecuaciones (7)–(8) presentan la forma convencional para las ecuaciones (1)–(2), la cual es actualmente usada en la práctica [80]. El parámetro θ es modelado como un proceso de Wiener estandar, i.e., satisface la ecuación

$$d\theta(t) = dW_3(t), \quad \theta(0) = \theta_0,$$

la cual puede también ser escrita como

$$\dot{\theta}(t) = \psi_3(t), \quad \theta(0) = \theta_0, \quad (9)$$

donde $\psi_3(t)$ es un ruido blanco Gaussiano.

El problema de filtrado es encontrar el estimado óptimo para el estado lineal-bilineal (7),(9), usando observaciones lineales (8) mezclados con perturbaciones independientes e idénticamente distribuidas modeladas como ruidos blancos Gaussianos. Colocaremos el tiempo de horizonte de filtrado a $T = 10$.

Las ecuaciones de filtrado (5),(6) toman la siguiente forma particular para el sistema (7)–(9)

$$\dot{m}_1(t) = m_1(t)m_2(t) + P_{12}(t) + P_{11}(t)[y(t) - m_1(t)], \quad (10)$$

$$\dot{m}_2(t) = P_{12}(t)[y(t) - m_1(t)], \quad (11)$$

con la condición inicial $m_1(0) = E(x_0 | y(0)) = m_{10}$ y $m_2(0) = E(\theta_0 | y(0)) = m_{20}$,

$$\dot{P}_{11}(t) = 1 + 2P_{11}(t)m_2(t) - P_{11}^2(t), \quad (12)$$

$$\dot{P}_{12}(t) = 1 + 2P_{12}(t)m_2(t) - P_{11}(t)P_{12}(t),$$

$$\dot{P}_{22}(t) = 1 - P_{12}^2(t),$$

con la condición inicial $P(0) = E((x_0, \theta_0) - m(0))(x_0, \theta_0 - m(0))^T | y(0)) = P_0$.

Resultados de simulación numérica son obtenidos resolviendo el sistema de ecuaciones de filtrado (10)–(12). Los valores obtenidos de los estimados $m_1(t)$, estimado para $x(t)$, y $m_2(t)$, estimado para $\theta(t)$, son comparados para los valores reales de la variable de estado $x(t)$ y el parámetro θ in (7)–(9).

Para el filtro (10)–(12) y el sistema de referencia (7)–(9) involucrados en la simulación, los siguientes valores iniciales son asignados: $x_0 = 1000$, $m_{10} = 0,1$, $m_{20} = 0$, $P_{110} = P_{120} = P_{220} = 100$. El parámetro desconocido θ es asignado como $\theta = 0,1$ en la primera simulación y cuando $\theta = -0,1$ en la segunda simulación, de este modo considerando el sistema (7) estable e inestable, respectivamente. Perturbaciones Gaussianas $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$ en (9) son efectuadas usando las funciones de ruido blanco diseñadas en MatLab. Oscilaciones de alta frecuencia en las gráficas de salida son suavizadas por un filtro Butterworth de paso bajo construido en MatLab, con entrada de paso bajo $\nu = 30$.

Las siguientes gráficas obtenidas son: gráfica de la variable de estado $x(t)$, el estimado óptimo del estado $m_1(t)$, y el estimado óptimo del parámetro $m_2(t)$ para el sistema inestable (7) ($\theta = 0,1$); gráficas de la variable de estado $x(t)$, el estimado óptimo del estado

$m_1(t)$, y el estimado óptimo del parámetro $m_2(t)$ para el sistema estable (7) ($\theta = -0,1$). Las gráficas de todas esas variables son mostradas en el intervalo total de simulación de $t_0 = 0$ a $T = 10$ en las figuras 1 y 2, respectivamente.

Puede ser observado que, en ambos casos, el estado estimado $m_1(t)$ converge al estado real $x(t)$ y el parámetro estimado $m_2(t)$ converge al valor real $(0,10 - 0,1)$ del parámetro desconocido $\theta(t)$ rápidamente, en menos de 10 unidades de tiempo. Este comportamiento puede ser clasificado como muy seguro, especialmente tomando en cuenta largas desviaciones en los valores iniciales para el estado real y su estimado y largos valores de las varianzas del error inicial. Note que las entradas de la matriz de ganancia $P_{11}(t)$ y $P_{12}(t)$ converge a valores finitos cercanos a 1 cuando el tiempo tiende a infinito, los cuales son esperados. Otra ventaja para ser mencionada es que el identificador de parámetros y el filtro diseñados trabajan igualmente bien para sistemas estables e inestables, el cual corresponde a operaciones de sistemas lineales en condiciones nominales y bajo perturbaciones externas, respectivamente.

5.4. Conclusiones

Este capítulo presenta la solución óptima en promedio cuadrático para el problema simultáneo de filtrado de estado e identificación de parámetros para sistemas estocásticos lineales con parámetros aditivos y multiplicativos desconocidos sobre observaciones lineales con una matriz de observación invertible, donde los parámetros desconocidos son considerados procesos de Wiener. El filtro de estado e identificador de parámetros óptimos son diseñados en la forma de un sistema cerrado de dimensión finita de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Estocásticas. Este resultado es teóricamente demostrado basado sobre el filtro óptimo obtenido previamente para sistemas de estado polinomial con la

parte lineal medida parcialmente sobre observaciones lineales y numéricamente verificado. Los resultados de simulación muestran muy confiable comportamiento del identificador de parámetros y el filtro diseñados, los cuales trabajan igualmente bien para sistemas estables e inestables. Esto debe ser notado que la técnica de identificación desarrollada, basada sobre el filtro óptimo para sistemas polinomiales con ruido multiplicativo polinomial, también será aplicable a sistemas con ecuación de estado polinomial (no necesariamente lineal), sistemas con parámetros desconocidos en observaciones, y otras amplias clases de sistemas.

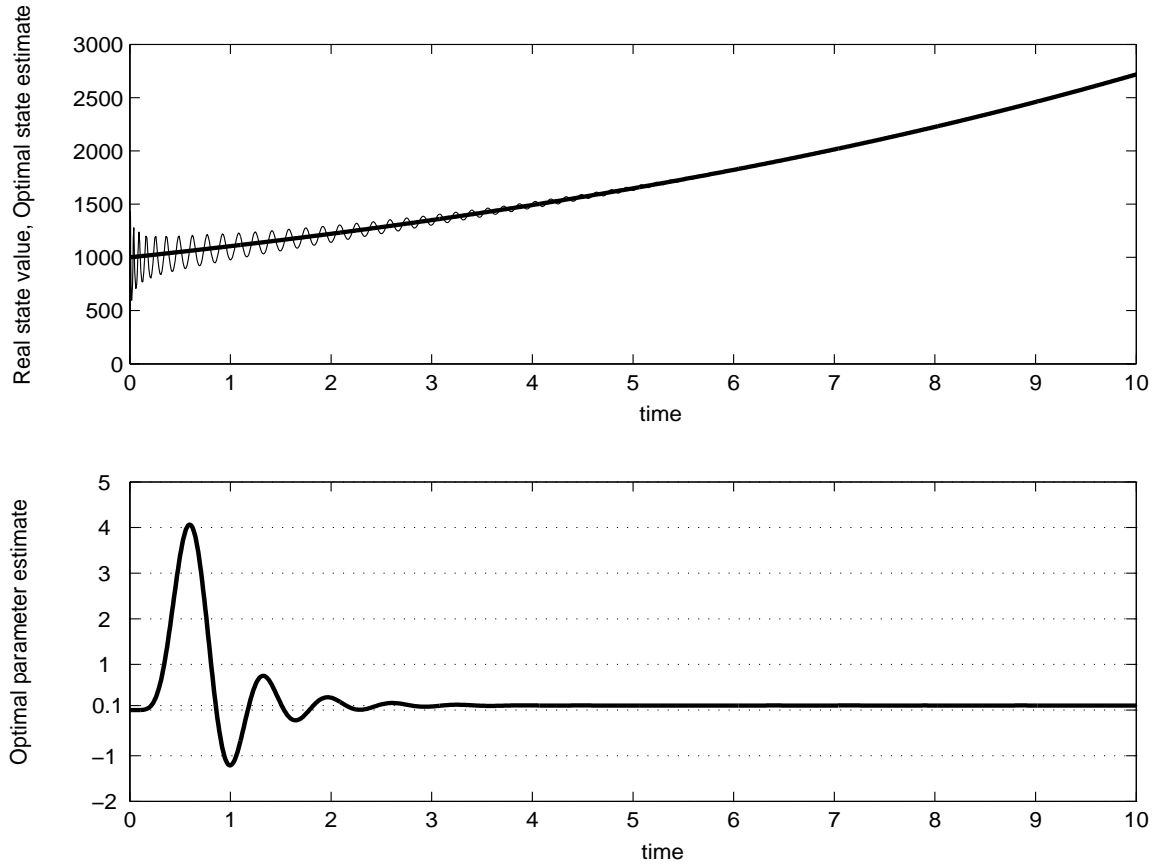


Figura 5.1: Gráfica de la variable de estado $x(t)$ (línea de arriba gruesa), el estimado óptimo de estado $m_1(t)$ (línea de arriba delgada), y gráfica del estimado óptimo del parámetro $m_2(t)$ (línea de abajo gruesa) para el sistema inestable (7) sobre el intervalo de simulación $[0, 10]$.

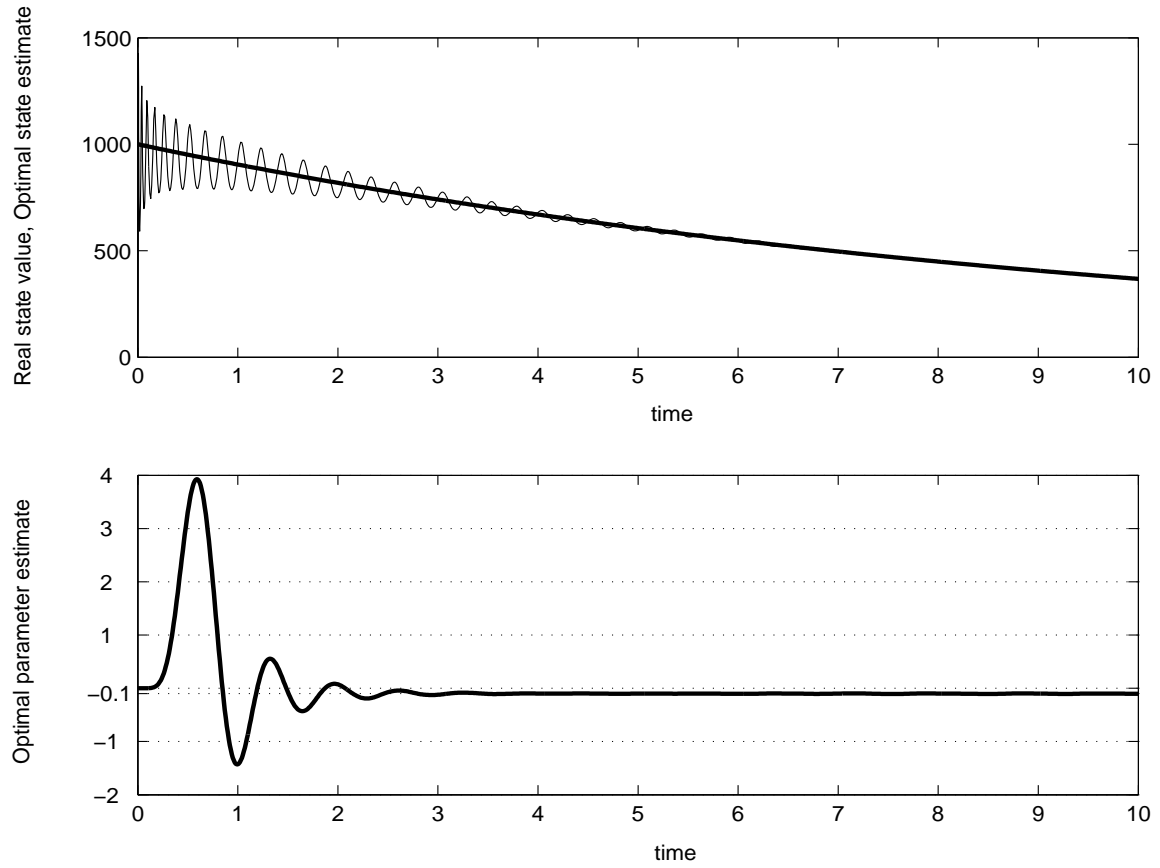


Figura 5.2: Gráfica de la variable de estado $x(t)$ (línea de arriba gruesa), el estimado óptimo de estado $m_1(t)$ (línea de arriba delgada), y gráfica del estimado óptimo del parámetro $m_2(t)$ (línea de abajo gruesa) para el sistema estable (7) sobre el intervalo de simulación $[0, 10]$.

Capítulo 6

Filtro Alternativo Óptimo para Sistemas Lineales con Retardo en el Estado

6.1. Problema de Filtrado para Sistemas Lineales con Retardo en el Estado

Sea (Ω, F, P) un espacio de probabilidad completo con una creciente familia real continua de σ -álgebras $F_t, t \geq 0$, y sea $(W_1(t), F_t, t \geq 0)$ y $(W_2(t), F_t, t \geq 0)$ procesos independientes de Wiener. Los procesos aleatorios F_t -medibles observado parcialmente $(x(t), y(t))$ son descritos por una ecuación diferencial de retardo para el estado del sistema

$$dx(t) = (a_0(t) + a(t)x(t-h))dt + b(t)dW_1(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

con la condición inicial $x(s) = \phi(s)$, $s \in [t_0 - h, t_0]$, y una ecuación diferencial para el proceso de observación:

$$dy(t) = (A_0(t) + A(t)x(t))dt + B(t)dW_2(t), \quad (2)$$

donde $x(t) \in R^n$ es el vector de estado, $y(t) \in R^m$ es el proceso de observación, $\phi(s)$ es un proceso estocástico Gaussiano continuo a tramos en promedio cuadrático (ver [63] para definición) dado en el intervalo $[t_0 - h, t_0]$ tal que $\phi(s)$, $W_1(t)$, y $W_2(t)$ son independientes. El estado del sistema $x(t)$ depende del estado de retardo $x(t - h)$, donde h es la desviación del retardo, la cuál actualmente hace el espacio de estado del sistema dimensional infinito (ver, por ejemplo, [47]). La función vectorial valuada $a_0(s)$ describe los efectos de entradas del sistema (controles y perturbaciones). Supuesto que $A(t)$ es una matriz diferente de cero y $B(t)B^T(t)$ es una matriz definida positiva. Todos los coeficientes en (1)–(2) son funciones determinísticas de dimensiones apropiadas.

El problema de estimación es encontrar el estimado óptimo $\hat{x}(t)$ del estado del sistema $x(t)$, basado sobre los procesos de observación $Y(t) = \{y(s), 0 \leq s \leq t\}$, que minimiza la norma-2 Euclideana

$$J = E[(x(t) - \hat{x}(t))^T(x(t) - \hat{x}(t)) \mid F_t^Y]$$

en cualquier momento de tiempo t . Aquí, $E[z(t) \mid F_t^Y]$ significa la esperanza condicional de un proceso estocástico $z(t) = (x(t) - \hat{x}(t))^T(x(t) - \hat{x}(t))$ con respecto a la σ -álgebra F_t^Y generado por el proceso de observación $Y(t)$ en el intervalo $[t_0, t]$. Como es conocido en [63], este estimado óptimo es dado por la esperanza condicional

$$\hat{x}(t) = m(t) = E(x(t) \mid F_t^Y)$$

del estado del sistema $x(t)$ con respecto a la σ -álgebra F_t^Y generada por el proceso de observación $Y(t)$ en el intervalo $[t_0, t]$. Como es usual, la función matricial

$$P(t) = E[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T \mid F_t^Y]$$

es la varianza del error de estimación.

La solución propuesta para este problema de filtrado óptimo es basado sobre las fórmulas para el diferencial de Ito de la esperanza condicional $E(x(t) | F_t^Y)$ y su varianza $P(t)$ (citada en [63]) y dada en la siguiente Sección.

6.2. Filtro Óptimo para Sistemas Lineales con Retardo en el Estado

Las ecuaciones de filtrado óptimo serán obtenidas usando de la fórmula para el diferencial de Ito de la esperanza condicional $m(t) = E(x(t) | F_t^Y)$ (ver [63])

$$dm(t) = E(\varphi(x) | F_t^Y)dt + E(x[\varphi_1 - E(\varphi_1(x) | F_t^Y)]^T | F_t^Y) \times \quad (3)$$

$$(B(t)B^T(t))^{-1}(dy(t) - E(\varphi_1(x) | F_t^Y)dt),$$

donde $\varphi(x)$ es el término "drift", en la ecuación de estado igual a $\varphi(x) = a_0(t) + a(t)x(t-h)$ y $\varphi_1(x)$ es el término "drift", en la ecuación de observación $\varphi_1(x) = A_0(t) + A(t)x(t)$.

Note que las igualdades de la esperanza condicional $E(x(t-h) | F_t^Y) = E(x(t-h) | F_{t-h}^Y) = m(t-h)$ son válidas para cualquier $h > 0$, ya que, en vista de valor de retardo positivo $h > 0$, el problema tratado (1),(2) es un problema de filtrado, no uno de suavidad, y, por lo tanto, la fórmula (3) produce el estimado óptimo $m(s)$ para cualquier tiempo s , $t_0 < s \leq t$, si las observaciones (2) son obtenidas hasta el momento actual t (ver [63]).

Una vez sustituido el desempeño para $\varphi(x)$ y $\varphi_1(x)$ y tomando en cuenta $E(x(t-h) | F_t^Y) = E(x(t-h) | F_{t-h}^Y) = m(t-h)$ para cualquier $h > 0$, la ecuación del estimado toma

la forma

$$\begin{aligned}
dm(t) &= (a_0(t) + a(t)m(t-h))dt + E(x(t)[A(t)(x(t)-m(t))]^T | F_t^Y)(B(t)B^T(t))^{-1} \times \\
&\quad (dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t))dt) = \\
&\quad (a_0(t) + a(t)m(t-h))dt + P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}(dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t))dt).
\end{aligned} \tag{4}$$

La forma obtenida de la ecuación del estimado óptimo es similar a un filtro de Kalman, excepto por el término $a(t)m(t-h)$. Para formar un sistema cerrado de las ecuaciones de filtrado, las ecuaciones para la matriz de varianza $P(t)$ pueden ser obtenidas usando la fórmula para el diferencial de Ito de la varianza $P(t) = E((x(t)-m(t))(x(t)-m(t))^T | F_t^Y)$ (citada otra vez [63]):

$$\begin{aligned}
dP(t) &= (E((x(t)-m(t))\varphi^T(x) | F_t^Y) + E(\varphi(x)(x(t)-m(t))^T | F_t^Y) + b(t)b^T(t) - \\
&\quad E(x(t)[\varphi_1 - E(\varphi_1(x) | F_t^Y)]^T | F_t^Y)(B(t)B^T(t))^{-1}E([\varphi_1 - E(\varphi_1(x) | F_t^Y)]x^T(t) | F_t^Y))dt + \\
&\quad E((x(t)-m(t))(x(t)-m(t))[\varphi_1 - E(\varphi_1(x) | F_t^Y)]^T | F_t^Y)(B(t)B^T(t))^{-1}(dy(t) - E(\varphi_1(x) | F_t^Y)dt).
\end{aligned}$$

Aquí, el último término será entendido como un tensor 3D (bajo el signo de la esperanza) convolucionado con un vector, que resulta en matriz. Una vez sustituyendo las expresiones para φ y φ_1 , la última fórmula toma la forma

$$\begin{aligned}
dP(t) &= (E((x(t)-m(t))x^T(t-h)a^T(t) | F_t^Y) + \\
&\quad E(a(t)x(t-h)(x(t)-m(t))^T | F_t^Y) + b(t)b^T(t) - \\
&\quad E(x(t)(x(t)-m(t))^T | F_t^Y)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}[A(t)E((x(t)-m(t))x^T(t) | F_t^Y))dt + \\
&\quad + E((x(t)-m(t))(x(t)-m(t))(A(t)(x(t)-m(t)))^T | F_t^Y) \times \\
&\quad (B(t)B^T(t))^{-1}(dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t))dt).
\end{aligned}$$

El último término en esta fórmula contiene el tercer momento central condicional $E((x(t)-m(t))(x(t)-m(t))(x(t)-m(t)) \mid F_t^Y)$ de $x(t)$ con respecto a observaciones, el cual es igual a cero, porque $x(t)$ es condicionalmente Gaussiana, en vista de la Gaussianidad de los ruidos y la condición inicial y la linealidad de las ecuaciones de estado y observación. Así, el último término entero es desaparecido y la siguiente ecuación de la varianza es obtenida

$$dP(t) = (E((x(t) - m(t))x^T(t-h)a^T(t) \mid F_t^Y) + E(a(t)x(t-h)(x(t) - m(t))^T \mid F_t^Y) + b(t)b^T(t) - P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t))dt. \quad (5)$$

Transformaremos el término $E(x(t)(x(t-h) - m(t-h))^T \mid F_t^Y)$ en la última ecuación. Denote como $x_1(t)$ la solución de la ecuación $\dot{x}_1(t) = a_0(t) + a(t)x_1(t-h)$ con la condición inicial $x_1(t_0) = x_0$. Entonces, la solución $x(t)$ de la ecuación (1) puede ser representada en la forma

$$x(t) = x_1(t) + \int_{t_0}^t b(s)dW_1(s). \quad (6)$$

Introduciremos ahora la matriz $\Phi(\tau, t)$, la cual servirá como una análoga no lineal para la matriz de transición de estados en el tiempo inverso. Realmente, defina $\Phi(\tau, t)$ como una matriz mencionada tal que la igualdad $\Phi(\tau, t)x_1(t) = x_1(\tau)$, $\tau \leq t$, se mantiene para cualquier $t, \tau \geq t_0$ y $\tau \leq t$. Naturalmente, $\Phi(\tau, t)$ puede ser definida como la matriz diagonal con elementos igual a $x_{1_i}(\tau)/x_{1_i}(t)$, donde $x_{1_i}(t)$ son los componentes del vector $x_1(t)$, si $x_{1_i}(t) \neq 0$ con probabilidad 1. La definición de $\Phi(\tau, t)$ para el caso de $x_{1_i}(t) = 0$ será considerada separadamente abajo.

De aquí, usando la representación (6) y la idea de la matriz $\Phi(\tau, t)$, el término $E(x(t)(x(t-h) - m(t-h))^T \mid F_t^Y)$ puede ser transformado como sigue

$$E(x(t)(x(t-h) - m(t-h))^T \mid F_t^Y) = E((x(t) - m(t))(x(t-h))^T \mid F_t^Y) =$$

$$\begin{aligned}
& E((x(t) - m(t))(x_1(t - h) + \int_{t_0}^{t-h} b(s)dW_1(s))^T \mid F_t^Y) = \\
& E((x(t) - m(t))(x_1(t - h))^T \mid F_t^Y) = E((x(t) - m(t))(\Phi(t - h, t)x_1(t))^T \mid F_t^Y) = \\
& E((x(t) - m(t))(x_1(t))^T \mid F_t^Y)(\Phi^*(t - h, t))^T = \\
& E((x(t) - m(t))(x_1(t) + \int_{t_0}^{t-h} b(s)dW_1(s))^T \mid F_t^Y)(\Phi^*(t - h, t))^T = \\
& E((x(t) - m(t))(x(t))^T \mid F_t^Y)(\Phi^*(t - h, t))^T = P(t)(\Phi^*(t - h, t))^T, \tag{7}
\end{aligned}$$

donde $P(t) = E((x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T \mid F_t^Y)$ es la varianza del error y $\Phi^*(t - h, t)$ es la matriz de transición de estados en el tiempo inverso para el proceso $x_1^*(t)$, que es la solución de la ecuación $\dot{x}_1^*(t) = a_0(t) + a(t)x_1^*(t - h)$ con la condición inicial $x_1^*(t_0) = m_0 = E(x(t_0) \mid F_{t_0}^Y)$. Note que la transición del tercero al cuarto renglón en (7) es válida en vista de la independencia de la varianza del error $P(t)$ de ambos, $x(t)$ y $m(t)$, en el momento corriente, que sigue de las ecuaciones de filtrado en [36]. Esta es la misma situación que toma lugar en el filtro de Kalman-Bucy [15].

Definamos ahora la matriz $\Phi(t - h, t)$ en el caso de $x_{1_i}(t) = 0$ con probabilidad 1 para uno de los componentes de $x_1(t)$. Entonces, la entrada diagonal correspondiente de $\Phi_{ii}(t - h, t)$ puede ser asignada a 0 para cualquier $h > 0$, porque, para el componente $x_i(t)$,

$$\begin{aligned}
& E(x_i(t)(x_j(t - h) - m_j(t - h)) \mid F_t^Y) = E((x_{1_i}(t) + (\int_{t_0}^t b(s)dW_1(s))_i) \times \\
& (x_j(t - h) - m_j(t - h)) \mid F_t^Y) = E(x_{1_i}(t)(x_j(t - h) - m_j(t - h)) \mid F_t^Y) = 0,
\end{aligned}$$

con probabilidad 1 para cualquier $j = 1, \dots, m$. Entonces, la definición $\Phi_{ii}(\tau, t) = 0$ para cualquier $\tau < t$, si $x_{1_i}(t) = 0$, lleva al mismo resultado como en la ecuación (7) y puede ser empleada. El elemento diagonal $\Phi_{ii}^*(\tau, t)$ de la matriz $\Phi^*(\tau, t)$ es definido en efecto y asignado a 0 para cualquier $\tau < t$, si los componentes correspondientes del proceso $x_1^*(t)$ son iguales a cero al momento t , $x_{1_i}^*(t) = 0$.

Así, en vista de la transformación (7), la ecuación (4) para el estimado óptimo toma la forma

$$\begin{aligned} dm(t) = (a_0(t) + a(t)m(t-h))dt + P(t)A^T(t) \times \\ (B(t)B^T(t))^{-1}(dy(t) - (A_0(t) + A(t)m(t-h))dt), \end{aligned} \quad (8)$$

con la condición inicial $m(t_0) = E(x(t_0) | F_{t_0}^Y)$.

Para formar un sistema de las ecuaciones de filtrado, la ecuación (8) será complementada con la ecuación para la varianza del error $P(t)$. En vista de la transformación (7), la ecuación (5) para la varianza del error toma la forma

$$\begin{aligned} dP(t) = P(t)(\Phi^*(t-h, t))^T a^T(t) + a(t)(\Phi^*(t-h, t))P(t) + \\ b(t)b^T(t) - P(t)A^T(t)(B(t)B^T(t))^{-1}A(t)P(t)dt. \end{aligned} \quad (9)$$

La ecuación (9) será complementada con la condición inicial

$$P(t_0) = E[(x(t_0) - m(t_0))(x(t_0) - m(t_0))^T | F_{t_0}^Y].$$

Por significado de la precedente derivación, el siguiente resultado es demostrado.

Teorema 1. El filtro óptimo de dimensión finita para el estado lineal con retardo (1) sobre las observaciones lineales (2) es dado por la ecuación (8) para el estimado óptimo $m(t) = E(x(t) | F_t^Y)$ y la ecuación (9) para la varianza del error de estimación $P(t) = E[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T | F_t^Y]$.

En la siguiente sección, el desempeño del filtro óptimo diseñado es verificado contra el filtro óptimo para el estado lineal con retardo, que ha sido obtenido recientemente en [36] en la forma de un conjunto de ecuaciones para el estimado de estado óptimo y la varianza del error óptima, cuyo número crece cuando el horizonte de filtrado actual tiende a infinito.

6.3. Ejemplo

Esta sección presenta un ejemplo de diseñar el filtro óptimo alternativo para un estado lineal con retardo sobre observaciones lineales y comparandolo con el filtro óptimo para el estado lineal con retardo, que ha sido recientemente obtenido en [36].

Sea el estado no observado $x(t)$ con retardo dado por

$$\dot{x}(t) = x(t-5), \quad x(s) = \phi(s), \quad s \in [-5, 0], \quad (10)$$

donde $\phi(s) = N(0, 1)$ para $s \leq 0$, y $N(0, 1)$ es una variable aleatoria Gaussiana con la media cero y la varianza unitaria. El proceso de observación es dado por

$$y(t) = x(t) + \psi(t), \quad (11)$$

donde $\psi(t)$ es un ruido blanco Gaussiano, el cual es la derivada en promedio cuadrático débil de un proceso de Wiener estandar (ver [63]). Las ecuaciones (10) y (11) presentan la forma convencional para las ecuaciones (1) y (2), la cual es actualmente usada en la práctica [80].

El problema de filtrado es encontrar el estimado óptimo para el estado lineal con retardo (10), usando observaciones directas (11) mezcladas con perturbaciones independientes idénticamente distribuidas modeladas como ruidos blancos Gaussianos. Colocaremos el tiempo de horizonte de filtrado a $T = 10$.

Las ecuaciones de filtrado (8),(9) toma la siguiente forma particular para el sistema (10),(11)

$$\dot{m}(t) = m(t-5) + P(t)[y(t) - m(t-5)], \quad (12)$$

con la condición inicial $m(s) = E(\phi(s)) = 0$, $s \in [-5, 0]$ y $m(0) = E(\phi(0) | y(0)) = m_0$, $s = 0$; y

$$\dot{P}(t) = 2P(t) - P^2(t)(\Phi^*(t-5, t))^2, \quad (13)$$

con la condición inicial $P(0) = E((x(0) - m(0))^2 \mid y(0)) = P_0$. La variable auxiliar $\Phi^*(t - 5, t)$ es igual a $\Phi^*(t - 5, t) = x^*(t - 5)/x^*(t)$, donde $x_1^*(t)$ es la solución de la ecuación

$$\dot{x}_1^*(t) = x_1^*(t - 5),$$

con la condición inicial $x_1^*(0) = m_0$.

Los estimados obtenidos una vez resolviendo las ecuaciones (12),(13) son comparados con los estimados satisfaciendo las ecuaciones de filtrado óptimo para estado lineal con retardo sobre observaciones lineales, que han sido obtenidas recientemente en [36], la cual toma la siguiente forma particular para el sistema (10),(11)

$$\dot{m}_A(t) = m_A(t - 5) + P_A(t)[y(t) - m_A(t)], \quad (14)$$

con la condición inicial $m_A(s) = E(\phi(s)) = 0$, $s \in [-5, 0)$ y $m_A(0) = E(\phi(0) \mid y(0)) = m_0$, $s = 0$;

$$\dot{P}_A(t) = 2P_1(t) - P^2(t), \quad (15)$$

con la condición inicial $P(0) = E((x(0) - m(0))^2 \mid y(0)) = P_0$; y

$$\dot{P}_1(t) = 2P_A(t - 5) + P_2(t) - P_A(t)P_A(t - 5), \quad (16)$$

con la condición inicial $P_1(s) = E((x(s) - m(s))(x(s - 5) - m(s - 5)) \mid F_s^Y)$, $s \in [0, 5]$; finalmente, $P_2(s) = E((x(s) - m(s))(x(s - 10) - m(s - 10)) \mid F_s^Y)$, $s \in [5, 10)$. Las formas particulares de las ecuaciones (12) y (14) y la condición inicial para $x(t)$ implican que $P_1(s) = P_0$ para $s \in [0, 5]$ y $P_2(s) = P_0$ para $s \in [5, 10)$.

Los resultados numéricos son obtenidos resolviendo los sistemas ecuaciones de filtrado (12)–(13) y (14)–(16). Los valores obtenidos de los estimados $m(t)$ y $m_A(t)$ satisfaciendo las ecuaciones (12) y (14), respectivamente, son comparados con los valores reales de la variable de estado $x(t)$ en (10).

Para cada uno de los dos filtros (12)–(13) y (14)–(16) y el sistema de referencia (10) involucrados, los siguientes valores iniciales son asignados: $x_0 = 2$, $m_0 = 10$, $P_0 = 100$. Los resultados son obtenidos usando realizaciones de las perturbaciones Gaussianas $\psi(t)$ en (11) generadas por la función de ruido blanco construida en MatLab.

Los siguientes valores de la variable de estado $x(t)$ y los estimados $m(t)$ y $m_A(t)$ son obtenidas y comparadas en los momentos del tiempo $T = 8, 9, 10$: para $T = 8$, $x(8) = 17,5$, $m(8) = 17,64$, $m_A(8) = 17,55$; para $T = 9$, $x(9) = 23,0$, $m(9) = 23,08$, $m_A(9) = 23,02$; para $T = 10$, $x(10) = 29,5$, $m(10) = 29,5$, $m_A(10) = 29,5$.

Así, puede ser concluido que el filtro óptimo alternativo obtenido (12)–(13) produce valores diferentes insignificativamente del estimado en comparación con el filtro óptimo (14)–(16) obtenido en [36]. Además, esta pequeña diferencia se origina debido a realizaciones diferentes del ruido blanco Gaussiano en (11). La solución ejercida proporciona sólo una comparación numérica entre dos formas diferentes del filtro óptimo para el sistema (10),(11), considerando que la comparación del filtro óptimo a otro filtro aproximado, tal como un filtro de Kalman extendido (EKF), revelando un mejor desempeño del filtro óptimo, puede ser encontrado en [36].

Note que el filtro óptimo alternativo consiste de sólo dos ecuaciones, cuyos número y estructura no cambia cuando el horizonte de filtrado tiende a infinito. La discusión subsecuente de los resultados obtenidos pueden ser encontrados en la Conclusión.

6.4. Conclusiones

Los resultados muestran que los valores del estimado calculados usando el filtro óptimo alternativo obtenido para un sistema lineal con retardo de estado muestran sólo una diferencia insignificativa de los valores estimados proporcionados por el filtro óptimo pre-

viamente obtenido en [36]. Además, los estimados producidos por ambos filtros óptimos convergen asintóticamente a los valores reales del estado del sistema cuando el tiempo tiende a infinito. La ventaja significativa del filtro alternativo es que consiste de solo dos ecuaciones, para el estimado óptimo y la estimación de la varianza del error, cuyos número y estructura no cambian cuando el horizonte de filtrado tiende a infinito. Por el contrario, el filtro óptimo obtenido previamente de [36] incluye un número variable de las ecuaciones de covarianza, el cual crece ilimitadamente cuando el horizonte de filtrado tiende a infinito, y la estructura de las ecuaciones de covarianza también varía con el número. El filtro alternativo obtenido es libre de esas complicaciones y proporciona la adecuada calidad buena de la estimación del estado.

Capítulo 7

Regulador Óptimo para Sistemas Lineales con Múltiples Retardos en el Estado

7.1. Planteamiento del Problema de Control Óptimo

Considere un sistema lineal con retardos de tiempo múltiples en el estado

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^p a_i(t)x(t-h_i) + B(t)u(t), \quad (1)$$

donde la condición inicial $x(s) = \phi(s)$, $s \in [t_0 - h, t_0]$, $h_0 = 0$, $h = \max(h_1, \dots, h_p)$, donde $x(\cdot) \in C([t_0 - h, t_0]; R^n)$ es el estado del sistema, $u(t) \in R^m$ es la variable de control, y $\phi(s)$ es una función continua dada en el intervalo $[t_0 - h, t_0]$. Los coeficientes $a_i(t)$ y $B(t)$ son considerados funciones continuas de tiempo. Note que el estado de un sistema retardado (1) de dimensión infinita [47]. La existencia de la solución hacia adelante única de la ecuación (1) es asegurada por el teorema de Carathéodory (ver, por ejemplo, [83]),

y la existencia de la única solución hacia atrás sigue de la analiticidad del lado derecho del funcional con respecto al estado del sistema (ver [49, 84])

La función de costo cuadrática para ser minimizada es definida como sigue:

$$J = \frac{1}{2}[x(T)]^T \psi[x(T)] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T (u^T(s)R(s)u(s)ds + x^T(s)L(s)x(s))ds, \quad (2)$$

donde R es una función matricial simétrica positiva definida y ψ , L son funciones matriciales simétricas continuas definidas no negativas, y $T > t_0$ es un momento de tiempo positivo.

El problema de control óptimo es encontrar el control $u^*(t)$, $t \in [t_0, T]$, que minimiza el criterio J a lo largo de la trayectoria $x^*(t)$, $t \in [t_0, T]$, generada bajo la sustitución $u^*(t)$ dentro de la ecuación de estado (1). La solución del problema de control óptimo establecido es dada en la siguiente Sección y entonces demostrada en el Apéndice.

7.2. Solución al Problema de Control Óptimo

La solución al problema de control óptimo para el sistema lineal con retardos de estado múltiple (1) y un criterio cuadrático (2) es dada como sigue. La ley de control toma la forma

$$u^*(t) = (R(t))^{-1}B^T(t)Q(t)x(t), \quad (3)$$

donde la función matricial $Q(t)$ satisface la ecuación de Riccati matricial con coeficientes dependientes de estado y variantes en el tiempo

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) = & L(t) - Q(t)\left(\sum_{i=0}^p a_i(t)N_i(t)\right) - \left(\sum_{i=0}^p N_i^T(t)a_i^T(t)\right)Q(t) - \\ & Q(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)Q(t), \end{aligned} \quad (4)$$

con la condición final $Q(T) = -\psi$.

Cada una de las matrices auxiliares $N_i(t)$, $i = 0, \dots, p$, es definida como una solución de la ecuación algebraica $N_i(t)x(t) = x(t - h_i)$, la cuál puede siempre ser satisfecha, si $x(t)$ no es el vector de ceros. Por otro lado, si la igualdad $x(t) = 0$ es satisfecha solo en un conjunto de puntos de tiempo aislados $t = \tau_k$, $k = 1, 2, \dots$, donde el valor del control óptimo (3) es también igual a cero, entonces los valores de $Q(\tau_k)$ pueden ser asignados como los límites de los valores de $Q(t)$ por la derecha, así asegurando la continuidad de $Q(t)$ como la solución de (4). Si la igualdad $x(t) = 0$ es satisfecha en un intervalo de tiempo continuo $[t_1, t_2]$, $t_2 \leq T$, donde el valor del control óptimo (3) es otra vez igual a cero, entonces la matriz $Q(t)$ en este intervalo puede ser encontrada como la solución de (4) continuada del intervalo $[t_2, T]$. Además, ya que la velocidad del estado $dx(t)/dt$ es también igual a cero en $[t_1, t_2]$, los valores de $x(t - h_i)$, $i = 1, \dots, p$ serán igual a cero, $x(t - h_i) = 0$, en este intervalo. Así, las matrices $N_i(t)$, $i = 1, \dots, p$, pueden ser asignadas arbitrariamente para $t \in [t_1, t_2]$, por ejemplo, como los límites de los valores de $N_i(t)$ desde el intervalo $[t_2, T]$, así asegurando la suavidad de $Q(t)$ como la solución de (4). Detalles de la demostración son dados en el Apéndice.

Note que las matrices $N_i(t)$ son actualmente las matrices de transición de estado del instante actual t al instante $t - h_i$ para el sistema con retardos original (1). La matriz $N_0(t)$ correspondiendo al término sin retardo $a_0(t)x(t)$ es igual a la matriz identidad, $N_0(t) = I$.

Al sustituir el control óptimo (3) a la ecuación de estado (1), la ecuación de estado controlado óptimamente es obtenida

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^p a_i(t)x(t - h_i) + B(t)R^{-1}(t)B^T(t)Q(t)x(t), \quad (5)$$

con la condición inicial $x(s) = \phi(s)$, $s \in [t_0 - h, t_0]$.

Note que el regulador óptimo obtenido hace una ventaja con respecto a resultados

óptimos en general para sistemas con retardos del tiempo (tal como es dado en [46, 45, 47, 53]), ya que (a) la ley de control óptima es dada explícitamente y no como una solución de un sistema ecuaciones integrodiferenciales o diferenciales parciales, y (b) la ecuación de Riccati para la matriz de ganancia no contiene argumentos avanzados en el tiempo y, por consiguiente, resulta de dos puntos generados en el problema de valor en la frontera en el problema de control óptimo con criterio cuadrático y horizonte finito (ver, por ejemplo, [50]). Así, el regulador óptimo obtenido es realizable usando dos ecuaciones diferenciales con retardo.

Observación 1. A la primera mirada, las matrices $N_i(t)$ parecen depender también de los estados del sistema $x(t)$ y $x(t - h_i)$. Sin embargo, esto no es así. Como sigue del teorema 3.2.6 en [47], la fórmula $x(t) = \Phi(t, \tau)x(\tau)$, la cuál es convencional para sistemas lineales sin retardos (ver [50]), también tiene lugar para los estados $x(t)$, $x(\tau)$ y la matriz fundamental $\Phi(t, \tau)$ del sistema con retardos del tiempo lineal (1), donde el control $u(t)$ es dado por (3). Note que $\Phi(t, \tau)$ no depende de $x(t)$ o $x(\tau)$; en particular, $\Phi(t, t - h_i)$ no depende de $x(t)$ o $x(t - h_i)$. Por lo tanto, cualquier matriz $N_i(t)$ formando una combinación lineal entre $x(t)$ y $x(t - h_i)$ es independiente de los estados del sistema.

Observación 2. Esto puede ser observado que las funciones matriciales $N_i(t)$ pueden ser no acotadas en vecindades de los momentos del tiempo aislados $t = \tau_k$, $k = 1, 2, \dots$, donde $x(\tau) = 0$. Esto ocasiona la pregunta si la teoría LQR óptima es aplicable al sistema transformado

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^p a_i(t)N_i(t)x(t) + B(t)u(t), \quad (6)$$

donde los coeficientes, que dependen de $N_i(t)$, pueden también ser no acotados. La respuesta afirmativa a esta pregunta sigue de la suposición general de la teoría de sistemas de control óptimo (ver [85], capítulo 2), donde sólo continuidad a pedazos del lado derecho es requerido, si la solución de la ecuación del sistema existe. Ya que la solución de

(6) coincide, por construcción, con la solución de la ecuación del sistema original (1), cuya existencia es verificada en el párrafo después de (1), la teoría LQR óptima se mantiene aplicable al sistema (6).

Observación 3. En algunos artículos (ver, por ejemplo, [53]), el control óptimo $u^*(t)$ es obtenido como una integral de los valores previos de $x(t)$ sobre el intervalo $[t - h, t]$. Sin embargo, ya que la solución hacia atrás de la ecuación (1) existe y es única, como fue mencionado en la Sección 2, cualquier valor previo $x(s)$, $s \in [t - h, t]$ puede ser representado únicamente como una función del valor actual $x(t)$ (igual como de cualquier valor retardado $x(t - r)$, $r > 0$). Así, el control óptimo $u^*(t)$ puede ser obtenido como una función de $x(t)$ en la forma (3). El valor actual $x(t)$ es seleccionado para formar el control de lazo cerrado (3), primero, porque la condición de transversalidad (ver [85]) inducida por la función de costo (2) puede fácilmente ser satisfecha y, segundo, debido a la aplicabilidad práctica del control del tiempo actual en problemas técnicos reales.

7.3. Ejemplo

Esta sección presenta un ejemplo de diseñar el regulador óptimo para un sistema (1) con un criterio (2), usando el esquema (3)–(5), y comparándolo con el regulador donde la matriz Q es seleccionada como en el regulador lineal óptimo para un sistema sin retardos. Además, el regulador óptimo (3)–(5) es comparado con dos reguladores lineales basado sobre aproximaciones racionales del sistema con retardos del tiempo original.

Comenzaremos con un sistema lineal escalar

$$\dot{x}(t) = x(t) + 10x(t - 0,25) + u(t), \quad (7)$$

con la condición inicial $x(s) = 1$ para $s \in [-0,25, 0]$. El problema de control es encontrar

el control $u(t)$, $t \in [0, T]$, $T = 0,5$, que minimice el criterio

$$J = \frac{1}{2} \left[\int_0^T u^2(t) dt + \int_0^T x^2(t) dt \right]. \quad (8)$$

En otras palabras, el problema de control es para minimizar la energía total del estado x usando la mínima energía total de control u .

Construiremos primero el regulador donde la ley de control y la matriz $Q(t)$ son calculadas en la misma manera como para el regulador lineal óptimo para un sistema lineal sin retardos, que es $u(t) = R^{-1}(t)B^T(t)Q(t)x(t)$ (ver [50] para referencia). Ya que $B(t) = 1$ en (7) y $R(t) = 1$ en (8), el control óptimo es realmente igual a

$$u(t) = Q(t)x(t), \quad (9)$$

donde $Q(t)$ satisface la ecuación de Riccati

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) = & -(a_0(t) + a_1(t))^T Q(t) - Q(t)(a_0(t) + a_1(t)) + L(t) - \\ & Q(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)Q(t), \end{aligned}$$

con la condición final $Q(T) = -\psi$. Ya que $a_0(t) = 1$, $a_1(t) = 10$, $a_0(t) + a_1(t) = 11$, $B(t) = 1$ en (7), y $L(t) = 1$, $\psi = 0$ en (8), la última ecuación cambia a

$$\dot{Q}(t) = 1 - 22Q(t) - Q^2(t), \quad Q(0,5) = 0. \quad (10)$$

Bajo la substitución del control (9) dentro de (7), el sistema controlado toma la forma

$$\dot{x}(t) = x(t) + 10x(t - 0,25) + Q(t)x(t). \quad (11)$$

Los resultados de aplicar el regulador (9)–(11) al sistema (7) son mostrados en la Fig. 1, la cuál presenta las gráficas del criterio (8) $J(t)$ y el control (9) $u(t)$ en el intervalo $[0, T]$. El valor del criterio (8) al momento final $T = 0,5$ es $J(0,5) = 19,16$.

Aplicaremos ahora el regulador óptimo (3)–(5) para sistemas lineales con retardos de estado múltiples para el sistema (7). La ley de control (3) toma la misma forma como (9)

$$u^*(t) = Q^*(t)x(t), \quad (12)$$

donde $Q^*(t)$ satisface la ecuación

$$\dot{Q}^*(t) = 1 - 2Q^*(t) - 20Q^*(t)N_1(t) - Q^{*2}(t), \quad Q^*(0,5) = 0, \quad (13)$$

donde $N_0(t) = 1$ y $N_1(t) = x(t - 0,25)/x(t)$ para $t \in [0, 0,5]$.

Note que la ecuación obtenida (13) no contiene argumentos avanzados y, por lo tanto, puede ser resuelta usando métodos numéricos simples, tal como "shooting". Este método consiste en variar las condiciones iniciales (13), tomando en cuenta monotonía de la solución de (13) con respecto a condiciones iniciales, hasta que la condición final es satisfecha. En este ejemplo, la ecuación (13) ha sido resuelta con la aproximación de condición final $Q^*(0,5) = 0,05$, para reducir el tiempo de cálculo.

Al sustituir el control (12) dentro de (7), el sistema controlado óptimamente toma la misma forma como (11)

$$\dot{x}(t) = x(t) + 10x(t - 0,25) + Q^*(t)x(t). \quad (14)$$

Los resultados de aplicar el regulador (12)–(14) al sistema (7) son mostrados en Fig. 2, en la cuál presenta las gráficas del criterio (8) $J(t)$ y el control (12) $u^*(t)$ en el intervalo $[0, T]$. El valor del criterio (8) al momento final $T = 0,5$ es $J(0,5) = 6,56$. Hay un mejoramiento definitivo (a tres veces) en los valores de la función de costo en comparación al caso precedente, debido a la óptimalidad del regulador (3)–(5) para sistemas lineales con retardos de estado múltiples.

Comparemos también el regulador óptimo (3)–(5) con el mejor regulador lineal basado sobre las aproximaciones racionales lineales y cuadráticas del sistema con retardos

del tiempo (7). Primero, la función de transferencia entrada-estado, $G(s) = (s - 1 - 10 \exp(-sh))^{-1}$, $h = 0,25$, es aproximada por una función racional hasta el primer orden de h : $G^{-1}(s) = s(1 + 10h) - 11 + O(h^2)$, la cuál resulta en la siguiente realización en el dominio del tiempo ($h = 0,25$)

$$\dot{x}(t) = (22/7)x(t) + (2/7)u(t), \quad (15)$$

con la condición inicial $x(0) = 1$. La ley de control es calculado como el control óptimo para el sistema lineal sin retardos (15):

$$u_1(t) = (2/7)Q_1(t)x(t), \quad (16)$$

y $Q_1(t)$ satisface la ecuación de Riccati

$$\dot{Q}_1(t) = 1 - (44/7)Q_1(t) - (2/7)^2 Q_1^2(t), \quad (17)$$

con la condición final $Q_1(0,5) = 0$. El control (16) es luego substituido dentro del sistema con retardos del tiempo original (7).

Los resultados de aplicar el regulador (15)–(17) al sistema (7) son mostrados en Fig. 3, la cuál presenta las gráficas del criterio (8) $J(t)$ y el control (16) $u_1(t)$ en el intervalo $[0, T]$. El valor del criterio (8) al momento final $T = 0,5$ is $J(0,5) = 7,39$. Así, los resultados de simulación muestran que la aplicación del regulador (15)–(17), basado sobre aproximaciones racionales de primer orden, produce todavía valores no satisfactorios de la función de costo en comparación con el regulador óptimo (3)–(5).

Después, la función de transferencia $G(s)$ es aproximada por una función racional hasta el segundo orden de h : $G^{-1}(s) = s(1 + 10h) - 11 - 10(h^2/2)s^2 + O(h^3)$. Esta aproximación resulta en la siguiente realización del dominio de tiempo ($h = 0,25$)

$$(10/32)(d^2(x(t))/dt^2) = (7/2)d(x(t))/dt - 11x(t) - u(t),$$

la cuál es representada en la forma estandar de dos ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\dot{x}(t) = z(t), \quad \dot{z}(t) = 11,2z(t) - 35,2x(t) - 3,2u(t), \quad (18)$$

con las condiciones iniciales $x(0) = 1$, $z(0) = 0$. La ley de control es calculada como el control óptimo para el sistema lineal sin retardos (18):

$$u_2(t) = B_2^T Q_2(t) [x(t) z(t)]^T, \quad (19)$$

y la matriz $Q_2(t)$ bidimensional satisface la ecuación de Riccati

$$\dot{Q}_2(t) = L_2 - a_2^T Q_2(t) - Q_2(t) a_2 - Q_2(t) B_2 B_2^T Q_2(t), \quad (20)$$

con la condición final $Q_2(T) = 0$, donde $B_2 = [0 \ -3,2]^T$, $a_2 = [0 \ 1 \ | \ -35,2 \ 11,2]$ y $L_2 = \text{diag}[1 \ 0]$. El control (19) es luego substituido dentro del sistema con retardos del tiempo original (7).

Los resultados de aplicar el regulador (18)–(20) al sistema (7) son mostrados en Fig. 4, la cuál presenta las gráficas del criterio (8) $J(t)$ y el control (19) $u_2(t)$ en el intervalo $[0, T]$. El valor del criterio (8) al momento final $T = 0,5$ es $J(0,5) = 52,25$, el cuál es mucho peor que en cualquier caso precedente. Así, la aproximación racional del segundo orden ocurre de ser prácticamente inútil, ya que esto resulta en un incremento en la dimensión del problema, produciendo dificultades computacionales adicionales y valores grandes de la función de costo. El último fenómeno es explicado por el hecho que la función de transferencia polinomial del segundo orden $G(s) = (s(1 + 10h) - 11 - 10(h^2/2)s^2)^{-1}$ tiene dos polos complejos inestables con partes reales positivas, las cuales no se aproximan al polo inestable real ($s = 3,83$). Esto produce dinámicas inestables adicionales en la aproximación del sistema, las cuales no estan presentes en el sistema original (7), así produciendo deformaciones demasiado largas en el diseño del control.

Finalmente note que la función de transferencia racional correspondiendo a la aproximación Pade $\exp(-sh) = (1 - sh/2)/(1 + sh/2)$ no es considerada aquí, ya que esta produce un polo inestable grande $s = 21,16$, que aproxima al polo inestable real (el segundo polo es negativo, i.e., estable), y también resulta en un incremento en la dimensión del problema.

7.4. Apéndice

Demostración de la solución del problema de control óptimo. Al introducir las funciones auxiliares $N_i(t)$, $0 = 1, \dots, p$, así como definidas en la Sección 3, la ecuación de estado (1) puede ser escrita en la forma

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^p a_i(t) N_i(t) x(t) + B(t) u(t), \quad (21)$$

con la condición inicial $x(0) = \phi(0)$. Ya que las matrices $N_i(t)$ son funciones dependientes del tiempo conocidas al momento de tiempo actual t , el problema de control óptimo original para un sistema con retardos del tiempo es ahora reducido al problema LQR óptimo convencional para el estado (21) y la misma función de costo cuadrática (2), en donde la matriz de la dinámica del estado A es igual a $A = \sum_{i=0}^p a_i(t) N_i(t)$. La bien conocida solución a este problema (ver, por ejemplo, [50]) produce directamente la ley de control óptima (3) y la ecuación de la matriz de ganancia en la forma (4).

Sin embargo, hay que demostrar que el control óptimo puede ser definido consistentemente en los momentos del tiempo donde $x(t) = 0$. Realmente, si el conjunto $\{\tau_k : x(\tau_k) = 0, k = 1, 2, \dots\}$ es un conjunto de puntos de tiempo aislados, entonces el control óptimo $u^*(\tau_k)$ es igual a cero en cualquier tiempo τ_k , en vista de linealidad y continuidad de la ley de control (3). Así, el valor de la matriz de ganancia $Q(\tau_k)$ no participa realmente en la formación del control óptimo y puede ser asignado como el límite de

los valores de $Q(t)$ desde la derecha, $Q(\tau_k) = \lim_{t \rightarrow \tau_k, t > \tau_k} Q(t)$, así asignando la continuidad de $Q(t)$ como la solución de (4). Asuma ahora que el conjunto $\{t : x(t) = 0\}$ contiene un intervalo del tiempo continuo, $[t_1, t_2]$, $t_2 \leq T$. Esto implica que el control óptimo (3) es igual a cero en este intervalo, $u^*(t) = 0$, $t \in [t_1, t_2]$. Por lo tanto, los valores de la matriz $Q(t)$ para $t \in [t_1, t_2]$ no participa en la formación del control óptimo en el intervalo $[t_1, t_2]$ y pueden ser asignados arbitrariamente. Por otro lado, el problema de control óptimo reducido al intervalo $[t_0, t_1]$ no induce ninguna otra condición de transversalidad adicional al punto t_1 , ya que el valor del estado es fijo a cero $t = t_1$, $x(t_1) = 0$, (ver [85]). Por lo tanto, cualquier función $Q(t)$ satisfaciendo (4) en $[t_0, t_2]$ podría ser usada para formar la ley de control óptima (3). Así, la matriz de ganancia $Q(t)$ puede ser encontrada en el intervalo $[t_0, t_2]$ como la solución de (4) continuada del intervalo $[t_2, T]$. Además, la velocidad del estado $dx(t)/dt$ es también igual a cero en el intervalo $[t_1, t_2]$, $dx(t)/dt = 0$, $t \in [t_1, t_2]$, si $x(t) = 0$ para $t \in [t_1, t_2]$. Análisis de la ecuación de estado (1) muestran que la igualdad $dx(t)/dt = 0$ en un intervalo de tiempo continuo es valida si $x(t - h_i) = 0$ para cualquier $i = 1, \dots, p$ en este intervalo. Así, las matrices $N_i(t)$, $i = 1, \dots, p$, pueden ser también asignadas arbitrariamente para $t \in [t_1, t_2]$, por ejemplo, como los límites de los valores de $N_i(t)$ del intervalo $[t_2, T]$, así asignando la suavidad de $Q(t)$ como la solución de (4).

Finalmente, hay que considerar el caso del valor del estado cero al punto inicial, $x(t_0) = 0$, y verificar que ninguna situación especial es generada. Realmente, ya que todos los coeficientes en (1),(2) y la función inicial $\phi(s)$ son continuos, la ley de control óptima es tambien continua con respecto a condiciones iniciales. Al aproximar la función inicial dada por funciones iniciales con valores diferentes de cero en $t = t_0$ convergiendo a cero en el límite, las leyes de control óptima (3) son obtenidas para cada aproximación prelímite. Eso resulta en el valor límite de control cero, $u(t_0) = 0$, en vista del valor límite de estado cero, $x(t_0) = \phi(t_0) = 0$, y la continuidad con respecto a condiciones iniciales. Así, el valor

inicial de la matriz $Q(t_0)$ no es importante para formar el valor del control $u(t_0)$ y puede ser dejado tal como había obtenido resolviendo la ecuación (4).

La solución del problema de control óptimo es demostrada.

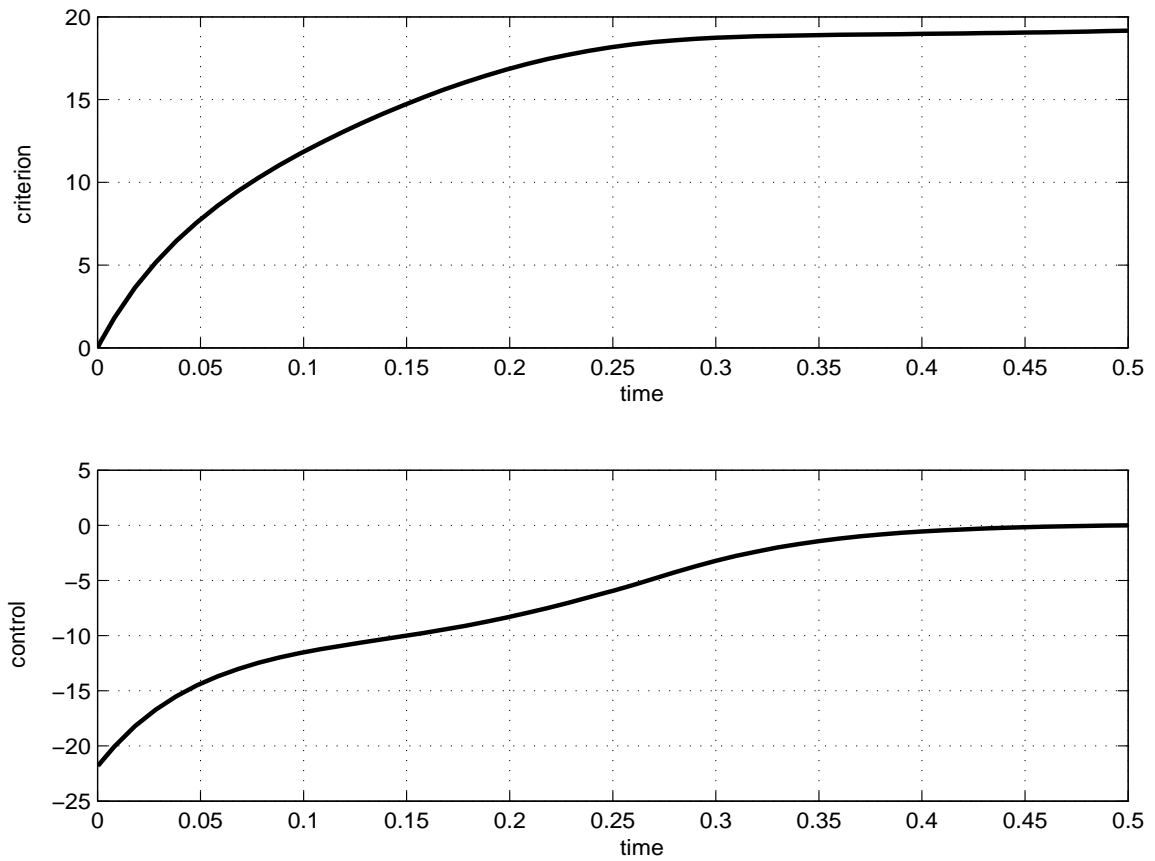


Figura 7.1: El mejor regulador disponible para sistemas lineales sin retardos. Gráficas del criterio (8) $J(t)$ y el control (9) $u(t)$ en el intervalo $[0, 0,5]$.

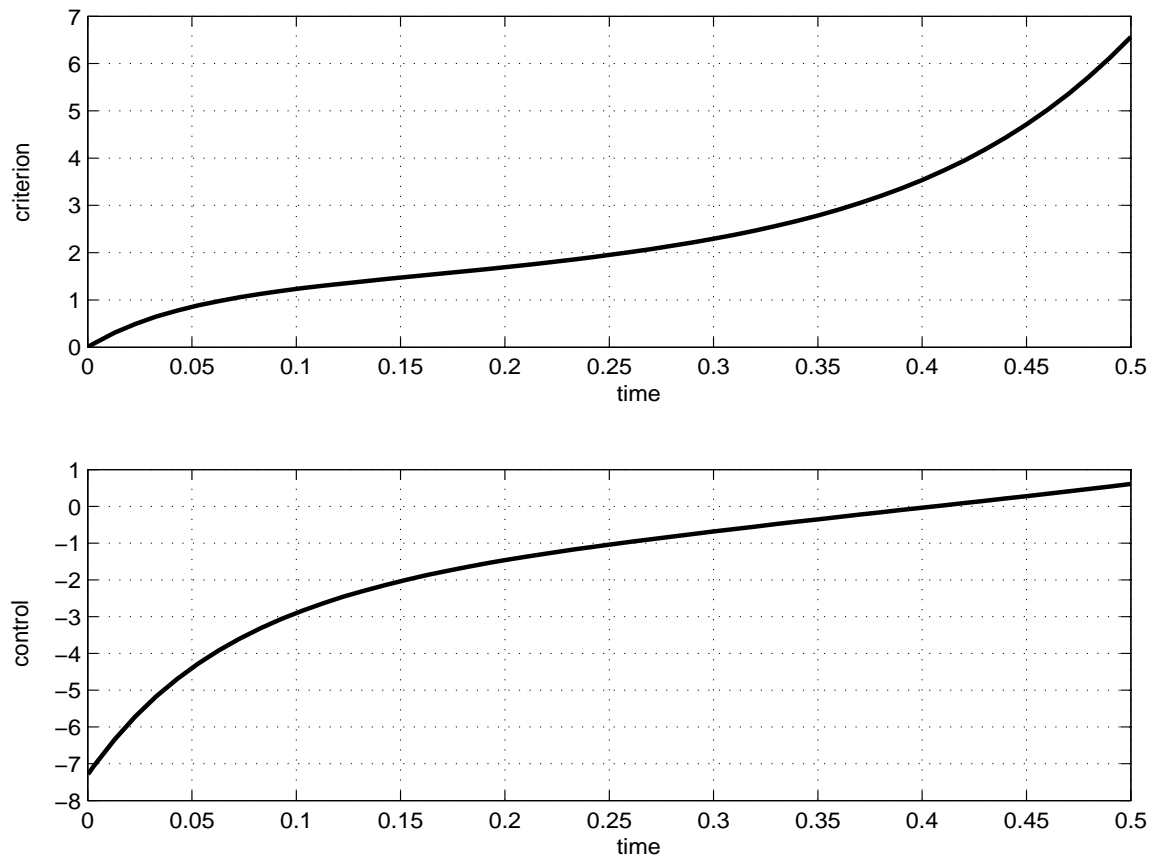


Figura 7.2: Regulador óptimo obtenido para sistemas lineales con múltiples retardos en el estado. Gráficas del criterio (8) $J(t)$ y el control óptimo (12) $u^*(t)$ en el intervalo $[0, 0.5]$.

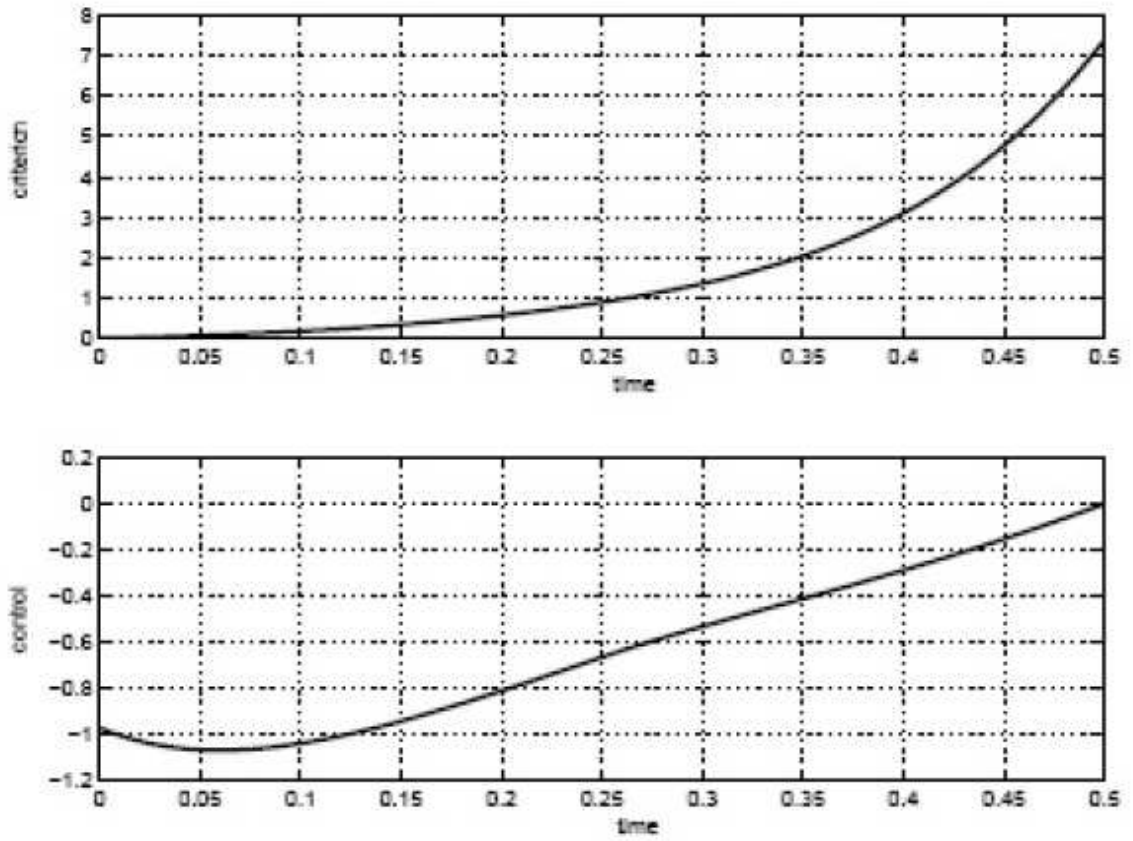


Figura 7.3: Regulador basado en una aproximación de primer orden del sistema con retardo original. Gráficas del criterio (8) $J(t)$ y el control (16) $u_1(t)$ en el intervalo $[0, 0,5]$.

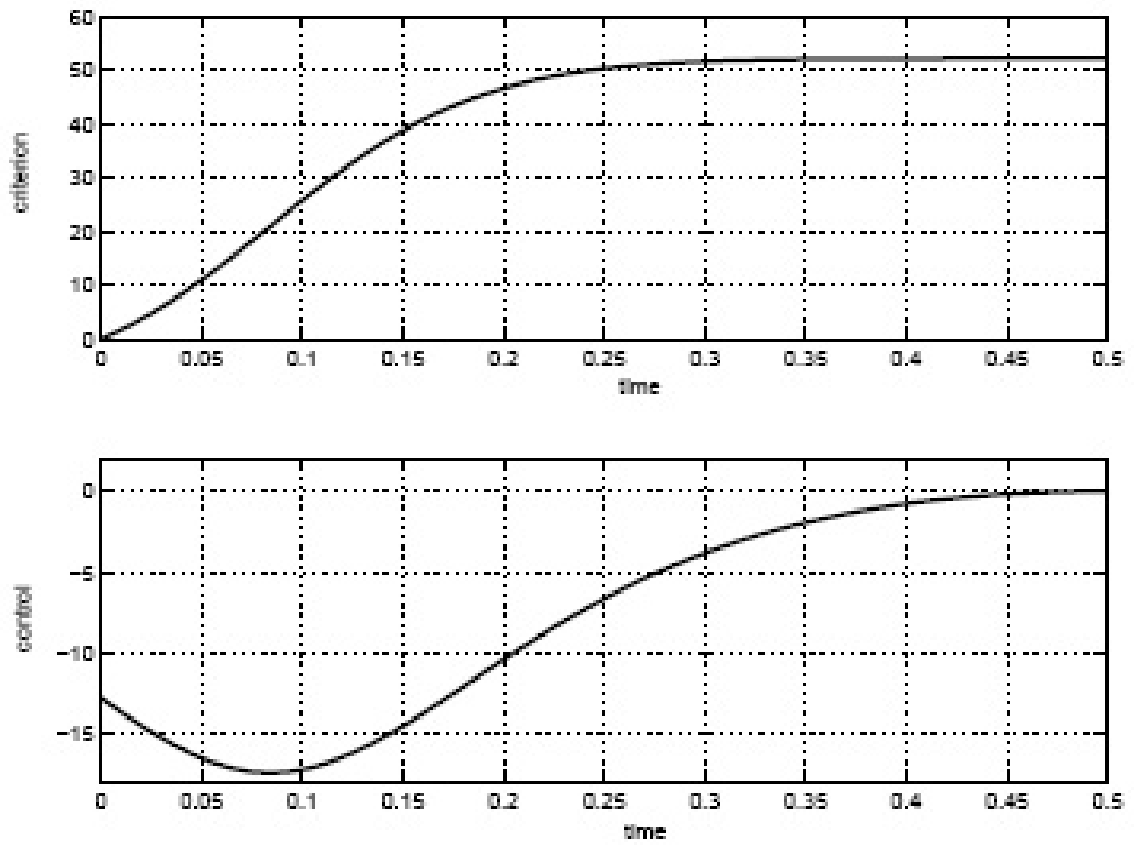


Figura 7.4: Regulador basado en una aproximación de segundo orden del sistema con retardo. Gráficas del criterio (8) $J(t)$ y el control (19) $u_2(t)$ en el intervalo $[0, 0,5]$.

Capítulo 8

Un Regulador Óptimo para Sistemas Lineales con Retardos Múltiples en la Entrada y el Estado

8.1. Planteamiento del Problema de Control Óptimo

Considerare un sistema lineal con retardos de tiempo múltiples en el estado y la entrada de control

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^p a_i(t)x(t - h_i) + \sum_{j=0}^q B_j(t)u(t - \tau_j), \quad (1)$$

con las condiciones iniciales $x(s) = \phi(s)$, $s \in [t_0 - h, t_0]$, $h_0 = 0$, $h = \max(h_1, \dots, h_p)$, donde $x(\cdot) \in C([t_0 - h, t_0]; R^n)$ es el estado del sistema, y $u(s) = \phi_1(s)$, $s \in [t_0 - \tau, t_0]$, $\tau_0 = 0$, $\tau = \max(\tau_1, \dots, \tau_p)$, donde $u(\cdot) \in C([t_0 - \tau, t_0]; R^m)$ es la variable de control, y $\phi(s)$ y $\phi_1(s)$ son funciones continuas dadas en los intervalos $[t_0 - h, t_0]$ y $[t_0 - \tau, t_0]$, respectivamente. Los coeficientes $a_i(t)$ y $B_j(t)$ son consideradas funciones continuas del

tiempo. Note que el estado de un sistema retardado (1) de dimensión infinita [47]. La existencia de la solución única de la ecuación (1) es por el teorema de Carathéodory (ver, por ejemplo, [83]), y existencia de la única solución sigue de la analiticidad del lado derecho del funcional con respecto al estado del sistema (see [49, 84])

La función de costo cuadrática para ser minimizada es definida como sigue:

$$J = \frac{1}{2}[x(T)]^T \psi[x(T)] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T (u^T(s)R(s)u(s)ds + x^T(s)L(s)x(s))ds, \quad (2)$$

donde R es positiva ψ , L son funciones matriciales simétricas continuas definidas no negativas, y $T > t_0$ es un momento de tiempo positivo.

El problema de control óptimo es encontrar el control $u^*(t)$, $t \in [t_0, T]$, que minimiza el criterio J a lo largo de la trayectoria $x^*(t)$, $t \in [t_0, T]$, generada bajo la sustitución $u^*(t)$ dentro de la ecuación de estado (1). La solución del problema de control óptimo establecido es dado en la siguiente Sección y entonces demostrada en el Apéndice.

8.2. Solución al Problema de Control Óptimo

La solución al problema de control óptimo para el sistema lineal con retardos de estado múltiples (1) y un criterio cuadrático (2) es dado como sigue. La ley de control toma la forma

$$u^*(t) = R^{-1}(t) \left(\sum_{j=0}^q M_j^T(t) B_j^T(t) \right) Q(t) x(t), \quad (3)$$

donde la función matricial $Q(t)$ satisface la ecuación de Riccati matricial con coeficientes dependientes de estado y variantes en el tiempo

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) = & L(t) - Q(t) \left(\sum_{i=0}^p a_i(t) N_i(t) \right) - \left(\sum_{i=0}^p N_i^T(t) a_i^T(t) \right) Q(t) - \\ & Q(t) \left(\sum_{j=0}^q B_j(t) M_j(t) \right) R^{-1}(t) \left(\sum_{j=0}^q M_j^T(t) B_j^T(t) \right) Q(t), \end{aligned} \quad (4)$$

con la condición final $Q(T) = -\psi$.

Cada una de las matrices auxiliares $N_i(t)$, $i = 0, \dots, p$, es definida como una solución de la ecuación algebraica $N_i(t)x(t) = x(t - h_i)$, la cuál puede siempre ser satisfecha, si $x(t)$ no es el vector de ceros. Por otro lado, si la igualdad $x(t) = 0$ es satisfecha solo en un conjunto de puntos de tiempo aislados $t = \tau_k$, $k = 1, 2, \dots$, donde el valor del control óptimo (3) es también igual a cero, entonces los valores de $Q(\tau_k)$ pueden ser asignados como los límites de los valores de $Q(t)$, así asegurando la continuidad de $Q(t)$ como la solución de (4). Si la igualdad $x(t) = 0$ es satisfecha en un intervalo de tiempo continuo $[t_1, t_2]$, $t_2 \leq T$, donde el valor del control óptimo (3) es otra vez igual a cero, entonces la matriz $Q(t)$ en este intervalo puede ser encontrada como la solución de (4) del intervalo $[t_2, T]$. Además, ya que la velocidad del estado $dx(t)/dt$ es también igual a cero en $[t_1, t_2]$, los valores de $x(t - h_i)$, $i = 1, \dots, p$ serán igual a cero, $x(t - h_i) = 0$, en este intervalo. Así, las matrices $N_i(t)$, $i = 1, \dots, p$, pueden ser asignadas arbitrariamente para $t \in [t_1, t_2]$, por ejemplo, como los límites de los valores de $N_i(t)$ desde el intervalo $[t_2, T]$, así asegurando la suavidad de $Q(t)$ como la solución de (4). Detalles de la demostración son dados en el Apéndice.

Cada una de las matrices auxiliares $M_j(t)$, $j = 0, \dots, q$, es definida como una solución de la ecuación algebraica $M_j(t)u^*(t) = u^*(t - \tau_j)$, la cuál siempre puede ser satisfecha, si $u^*(t)$ no es el vector de ceros. La igualdad $u^*(t) = 0$ podría ser satisfecha en inspección de las siguientes razones: 1) $x(t) = 0$; 2) $Q(t) = 0$; o 3) $\sum_{j=0}^q M_j^T(t)B_j^T(t) = 0$. El primer caso, $x(t) = 0$, ha sido ya discutido y los métodos para extender las definiciones de las matrices correspondientes han sido apuntados. El segundo caso, $Q(t) = 0$, permite no definir las matrices $M_j(t)$, ya que los valores de $Q(t)$ ya son conocidos. Finalmente, el tercer caso, $\sum_{j=0}^q M_j^T(t)B_j^T(t) = 0$, implica que el término cuadrático en la ecuación de Riccati (4) es igual a cero (mientras que los otros términos no son cambiados) y, por lo tanto, también

permite no definir las matrices $M_j(t)$.

Note que las matrices $N_i(t)$ y $M_j(t)$ son realmente las matrices de transición del control y del estado del instante actual t a los instantes $t - h_i$ y $t - \tau_j$ para el sistema con retardos de tiempo original (1). Las matrices $N_0(t)$ y $M_0(t)$ correspondiendo a los términos sin retardo $a_0(t)x(t)$ y $B_0(t)u^*(t)$ son iguales a la matriz de identidad, $N_0(t) = M_0(t) = I$, por todas partes.

El control óptimo (3) dentro de la ecuación de estado (1), la ecuación de estado controlada óptimamente es obtenida

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^p a_i(t)x(t - h_i) + B(t)R^{-1}(t)\left(\sum_{j=0}^q M_j^T(t)B_j^T(t)\right)Q(t)x(t), \quad (5)$$

con las condiciones iniciales $x(s) = \phi(s)$, $s \in [t_0 - h, t_0]$, y $u(s) = \phi_1(s)$, $s \in [t_0 - \tau, t_0]$

El regulador óptimo obtenido hace una mejora con respecto a resultados de óptimalidad general para sistemas con retardos del tiempo (tal como dados en [45, 46, 47, 53]), ya que (a) la ley de control óptima es dada explícitamente y no como una solución de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales o integrodiferenciales, y (b) la ecuación de Riccati para la matriz de ganancia no contiene argumentos avanzados de tiempo y, por lo tanto, de control óptimo con criterio cuadrático y horizonte finito (ver, por ejemplo, [50]). Así, el regulador óptimo obtenido es realizable usando dos ecuaciones diferenciales con retardos.

Observación. En algunos artículos (ver, por ejemplo, [53]), el control óptimo $u^*(t)$ es obtenido como una integral de los valores previos de $x(t)$ sobre el intervalo $[t - h, t]$. Sin embargo, ya que la solución retraída de la ecuación (1) existe y es única, como mencionada en la Sección 2, cualquier valor previo $x(s)$, $s \in [t - h, t]$ puede ser representado únicamente como una función del valor actual $x(t)$ (tan buena como de cualquier valor retardado $x(t - r)$, $r > 0$). Así, el control óptimo $u^*(t)$ puede ser obtenido como una función de $x(t)$ en la forma (3). El valor actual $x(t)$ es seleccionado para formar el control de lazo cerrado

(3), primero, porque la condición de transversalidad (ver [85]) inducida por la función de costo (2) puede fácilmente ser satisfecha y, segundo, debido a aplicabilidad del causal control de tiempo actual en problemas técnicos reales.

8.3. Ejemplo

Esta sección presenta un ejemplo de diseñar el regulador óptimo para un sistema (1) con un criterio (2), usando el esquema (3)–(5), y comparándolo con el regulador donde la matriz Q es seleccionada como en el regulador lineal óptimo para un sistema sin retardos. Además, el regulador óptimo (3)–(5) es comparado con dos reguladores lineales basados sobre aproximaciones racionales del sistema con retardos de tiempo original.

Comenzaremos con un sistema lineal escalar

$$\dot{x}(t) = x(t) + 10x(t - 0,25) + u(t - 0,5), \quad (6)$$

con la condición inicial $x(s) = 0,1$ para $s \in [-0,25, 0]$ y $u(s) = 10$ para $s \in [-0,5, 0]$. El problema de control óptimo es encontrar el control $u(t)$, $t \in [0, T]$, $T = 1$, que minimiza el criterio

$$J = \frac{1}{2} \left[\int_0^T u^2(t) dt + \int_0^T x^2(t) dt \right]. \quad (7)$$

En otras palabras, el problema de control es para minimizar la energía total del estado x usando la mínima energía total de control u .

Construiremos primero el regulador donde la ley de control y la matriz $Q(t)$ son calculadas en la misma manera como para el regulador lineal óptimo para un sistema lineal sin retardos, que es $u(t) = R^{-1}(t)B^T(t)Q(t)x(t)$ (ver [50] para referencia). Ya que $B(t) = 1$ en (6) y $R(t) = 1$ en (7), el control óptimo es realmente igual a

$$u(t) = Q(t)x(t), \quad (8)$$

donde $Q(t)$ satisface la ecuación de Riccati

$$\dot{Q}(t) = -(a_0(t) + a_1(t))^T Q(t) - Q(t)(a_0(t) + a_1(t)) + L(t) - Q(t)B(t)R^{-1}(t)B^T(t)Q(t),$$

con la condición final $Q(T) = -\psi$. Ya que $a_0(t) = 1$, $a_1(t) = 10$, $a_0(t) + a_1(t) = 11$, $B(t) = 1$ en (6), y $L(t) = 1$, $\psi = 0$ en (7), la última ecuación cambia a

$$\dot{Q}(t) = 1 - 22Q(t) - Q^2(t), \quad Q(1) = 0. \quad (9)$$

Al sustituir el control (8) dentro de (6), el sistema controlado toma la forma

$$\dot{x}(t) = x(t) + 10x(t - 0,25) + Q(t)x(t). \quad (10)$$

Los resultados de aplicar el regulador (8)–(10) al sistema (6) son mostrados en la Fig. 1, la cuál presenta las gráficas del criterio (7) $J(t)$ y el control (8) $u(t)$ en el intervalo $[0, T]$. El valor del criterio (7) al momento final $T = 1$ es $J(1) = 9113,63$.

Aplicaremos ahora el regulador óptimo (3)–(5) para sistemas lineales con retardos de estado múltiples al sistema (6). La ley de control (3) toma la misma forma como (8)

$$u^*(t) = Q^*(t)x(t), \quad (11)$$

donde $Q^*(t)$ satisface la ecuación

$$\dot{Q}^*(t) = 1 - 2Q^*(t) - 20Q^*(t)N_1(t) - M_1^2(t)Q^{*2}(t), \quad Q^*(1) = 0, \quad (12)$$

donde $N_0(t) = 1$, $N_1(t) = x(t - 0,25)/x(t)$, y $M_1(t) = u^*(t - 0,5)/u^*(t)$ para $t \in [0, 1]$.

Note que la ecuación obtenida (12) no contiene argumentos avanzados y, por lo tanto, puede ser resuelta usando métodos numéricos simples, tal como "shooting". Este método consiste en variar las condiciones iniciales (12), tomando en cuenta monotonía de la solución de (12) con respecto a condiciones iniciales, hasta que la condición final es satisfecha.

Al sustituir el control (11) dentro de (6), el sistema controlado óptimamente toma la misma forma

$$\dot{x}(t) = x(t) + 10x(t - 0,25) + M_1(t)Q^*(t)x(t). \quad (13)$$

Al resultado aplicar el regulador (11)–(13) al sistema (6) son mostrados en la Fig. 2, en la cuál presenta las gráficas del criterio (7) $J(t)$ y el control (11) $u^*(t)$ en el intervalo $[0, T]$. Los valores del criterio (7) al momento final $T = 1$ es $J(1) = 465,54$. Hay un mejoramiento definitivo (a veinte veces) en los valores de la función de costo en comparación al caso precedente, debido a la óptimalidad (3)–(5) para sistemas lineales con retardos múltiples en la entrada y el estado.

Comparemos también el regulador óptimo (3)–(5) con el mejor regulador basado sobre las aproximaciones racionales lineal y cuadrática del sistema con retardo de tiempo (6). Primero, la función de transferencia entrada-estado de (6), $G(s) = (\exp(-s\tau))(s - 1 - 10 \exp(-sh))^{-1}$, $h = 0,25$, $\tau = 0,5$ es aproximada por una función racional hasta el primer orden de h and τ : $G^{-1}(s) = s(1+10h) - 11 - 11s\tau + o(h+\tau)$, la cual resulta en la realización en el dominio del tiempo ($h = 0,25$, $\tau = 0,5$)

$$\dot{x}(t) = -(11/2)x(t) + (1/2)u_1(t), \quad (14)$$

con la condición inicial $x(0) = 1$. La ley de control es calculada como el control óptimo para el sistema lineal sin retardos (14):

$$u_1(t) = \frac{1}{4}(Q_1(t)x(t)), \quad (15)$$

y $Q_1(t)$ satisface la ecuación de Riccati

$$\dot{Q}_1(t) = 1 + 11Q_1(t) - (1/4)Q_1^2(t), \quad (16)$$

con la condición final $Q_1(1) = 0$. El control (15) es entonces sustituido dentro del sistema con retardos del tiempo original (6).

Los resultados de aplicar el regulador (14)—(16) al sistema (6) son mostrados en la Fig. 3, la cuál presenta las gráficas del criterio (7) $J(t)$ y el control (15) $u_1(t)$ en el intervalo $[0, T]$. Los valores del criterio (7) al momento final $T = 1$ es $J(1) = 544,44$. Así, los resultados de simulación muestran que la aplicación del regulador (14)—(16), basado sobre la aproximación racional del primer orden, produce y mantiene valores no satisfactorios de la función de costo en comparación al regulador óptimo (3)—(5).

Después, la función de transferencia $G(s)$ es aproximada por una función racional hasta el segundo orden de h y τ : $G^{-1}(s) = s(1+10h) - 11 - 10(h^2/2)s^2 - 11s\tau - (11/2)(\tau^2/2)s^2 + o(h^2 + \tau^2)$. Esta aproximación resulta en la realización en el dominio del tiempo, la cuál es representada en la forma estandar de dos ecuaciones diferenciales de primer orden ($h = 0,25$, $\tau = 0,5$)

$$\dot{x}(t) = z(t), \quad \dot{z}(t) = -(32/27)z(t) - (176/27)x(t) - (16/27)u_2(t), \quad (17)$$

con las condiciones iniciales $x(0) = 1$, $z(0) = 0$. La ley de control es calculada como el control óptimo para el sistema lineal sin retardos (17):

$$u_2(t) = B_2 Q_2(t) [x(t) z(t)]^T, \quad (18)$$

y la matriz bidimensional $Q_2(t)$ satisface la ecuación de Riccati

$$\dot{Q}_2(t) = L_2 - a_2^T Q_2(t) - Q_2(t) a_2 - Q_2(t) B_2 B_2^T Q_2(t), \quad (19)$$

con la condición final $Q_2(T) = 0$, donde $B_2 = [0 \ -16/27]^T$,

$a_2 = [0 \ 1 \ | \ -176/27 \ -32/27]$ y $L_2 = \text{diag}[1 \ 0]$. El control (18) es entonces sustituido dentro del sistema con retardo de tiempo original (6).

Los resultados de aplicar el regulador (17)—(19) al sistema (6) son mostrados en la Fig. 4, la cuál presenta las gráficas del criterio (7) $J(t)$ y el control (18) $u_2(t)$ en el intervalo $[0, T]$. El valor del criterio (7) al momento final $T = 1$ es $J(1) = 539,68$, el cuál es solo

un poco mejor que en el caso precedente. Así, la aproximación racional de segundo orden ocurre para estar prácticamente inútil, ya que esto guía a un incremento en la dimensión del problema, produciendo dificultades computacionales adicionales, y valores mejorados insignificadamente de la función de costo en comparación a una de primer orden.

Finalmente note que la función de transferencia racional correspondiente a la aproximación de Pade $\exp(-sh) = (1 - sh/2)/(1 + sh/2)$ no es considerada aquí, ya que esto produce un polo inestable $s = 21,16$, el cuál no se aproxima al polo inestable real, $s = 3,83$, de la función de transferencia original de (6) (los otros dos polos producidos son negativos, i.e., estables), y también guía a un incremento en la dimensión del problema hasta un sistema de tercer orden. Esto también podría ser fácilmente observado que el polo inestable del sistema sin retardos dado por el diseño del regulador (8),(9) es igual a $s = 22$, el cuál es similar a aquella aproximación de Pade.

8.4. Apéndice

Demostración de la solución del problema de control óptimo. Al introducir las funciones $N_i(t)$, $0 = 1, \dots, p$, y $M_j(t)$, $0 = 1, \dots, q$, como son definidas en la Sección 3, la ecuación de estado (1) puede ser escrita en la forma

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^p a_i(t)N_i(t)x(t) + \sum_{j=0}^q B_j(t)M_j(t)u(t), \quad (20)$$

con la condición inicial $x(0) = \phi(0)$. Ya que las matrices $N_i(t)$ y $M_j(t)$ son conocidas como funciones dependientes del tiempo al momento de tiempo actual t , el problema de control óptimo original para un sistema con retardo de tiempo es ahora reducido al problema óptimo convencional LQR para el estado (20) y la misma función de costo cuadrática (2), en donde la matriz de dinámica del estado A es igual a $A(t) = \sum_{i=0}^p a_i(t)N_i(t)$ y la matriz de

control B es igual a $B(t) = \sum_{j=0}^q B_j(t)M_j(t)$. La solución bien conocida para este problema (ver, por ejemplo, [50]) directamente produce la ley de control óptima (3) y la ecuación de la matriz de ganancia en la forma (4).

Esto de cualquier modo será demostrado que el control óptimo puede ser consistentemente definida en los momentos de tiempo donde $x(t) = 0$ o $u^*(t) = 0$. Considere el primer caso $x(t) = 0$. Realmente, si el conjunto $\{\tau_k : x(\tau_k) = 0, k = 1, 2, \dots\}$ es un conjunto de puntos aislados, entonces el control óptimo $u^*(\tau_k)$ es igual a cero en cualquier tiempo τ_k , en vista de linealidad y continuidad de la ley de control (3). Así, el valor de la matriz de ganancia $Q(\tau_k)$ en efecto no participa en la formación del control óptimo y puede ser asignado cuando el límite de los valores de $Q(t)$ de la derecha, $Q(\tau_k) = \lim_{t \rightarrow \tau_k, t > \tau_k} Q(t)$, así asegurando la continuidad de $Q(t)$ como la solución de (4). Suponer ahora que el conjunto $\{t : x(t) = 0\}$ comprendido en un intervalo de tiempo continuo, $[t_1, t_2]$, $t_2 \leq T$. Esto implica que el control óptimo (3) es igual a cero en este intervalo, $u^*(t) = 0$, $t \in [t_1, t_2]$. De aquí, los valores de la matriz $Q(t)$ para $t \in [t_1, t_2]$ no participa en la formación del control óptimo en el intervalo $[t_1, t_2]$ y puede ser asignado arbitrariamente. Por otro lado, el problema de control óptimo reducido para el intervalo $[t_0, t_1]$ no induce cualquier condición de transversalidad adicional en el punto t_1 , ya que el valor del estado es fijo a cero en $t = t_1$, $x(t_1) = 0$, es dado en (ver [85]). Cualquier función $Q(t)$ satisfaciendo (4) en $[t_0, t_2]$ será apropiado para formar la ley de control óptima (3). Así, la matriz de ganancia $Q(t)$ puede ser establecida en el intervalo $[t_0, t_2]$ como la solución de (4) prolongado del intervalo $[t_2, T]$. Además, la velocidad del estado $dx(t)/dt$ es también igual a cero en el intervalo $[t_1, t_2]$, $dx(t)/dt = 0$, $t \in [t_1, t_2]$, si $x(t) = 0$ para $t \in [t_1, t_2]$. Análisis de la ecuación de estado (1) muestra que la igualdad $dx(t)/dt = 0$ en un intervalo de tiempo continuo es obtenido si $x(t - h_i) = x(t - \tau_j) = 0$ para cualquier $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, q$, en este intervalo. Así, las matrices $N_i(t)$, $i = 1, \dots, p$, y $M_j(t)$, $j = 1, \dots, q$, pueden también ser

asignadas arbitrariamente para $t \in [t_1, t_2]$, por ejemplo, cuando el límite de sus valores del intervalo $[t_2, T]$, así asegurando la suavidad de $Q(t)$ como la solución de (4).

Considere ahora el caso $u^*(t) = 0$. Realmente, la igualdad $u^*(t) = 0$ será satisfecha en vista de las siguientes razones: 1) $x(t) = 0$; 2) $Q(t) = 0$; o 3) $\sum_{j=0}^q M_j^T(t)B_j^T(t) = 0$. El primer caso, $x(t) = 0$, ha sido ya discutido y los métodos para extender las definiciones de las matrices correspondientes han sido apuntados. El segundo caso, $Q(t) = 0$, permite a uno no definir las matrices $M_j(t)$, ya que los valores de $Q(t)$ ya son conocidos. Finalmente, el tercer caso, $\sum_{j=0}^q M_j^T(t)B_j^T(t) = 0$, implica que el término cuadrático en la ecuación de Riccati (4) es igual a cero (mientras que los otros términos son inalterados) y, por lo tanto, también permite no definir las matrices $M_j(t)$.

Finalmente, considere el caso del valor del estado cero en el punto inicial, $x(t_0) = 0$, y verificar que situación no especial es generada. Realmente, ya que todos los coeficientes en (1),(2) y la función inicial $\phi(s)$ son continuos, la ley de control óptima es también continua con respecto a condiciones iniciales. Al aproximar la función inicial dada por funciones iniciales con valores diferentes de cero en $t = t_0$ convergiendo a cero en el límite, las leyes de control óptimas (3) son obtenidas para cada aproximación pre-restrictiva, la cuál produce los valores, $u(t_0) = 0$, en vista del valor de estado, $x(t_0) = \phi(t_0) = 0$, y la continuidad con respecto a condiciones iniciales. Así, el valor inicial de la matriz $Q(t_0)$ no es importante para formar el valor del control $u(t_0)$ y puede ser dejada tal como es obtenida bajo la solución de la ecuación (4).

La solución del problema de control óptimo es demostrado.

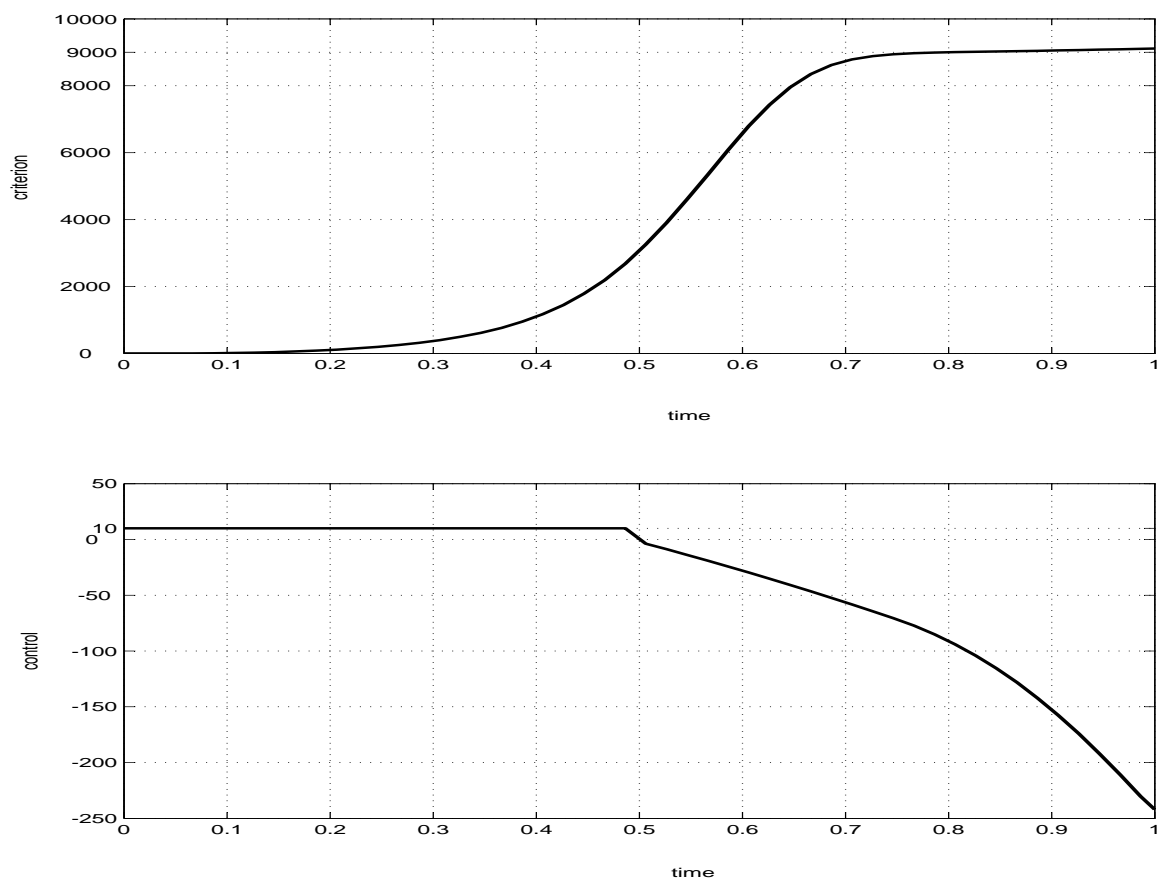


Figura 8.1: Mejor regulador lineal disponible para sistemas lineales sin retardos. Gráficas del criterio (7) $J(t)$ y el control (8) $u(t)$ en el intervalo $[0, 1]$

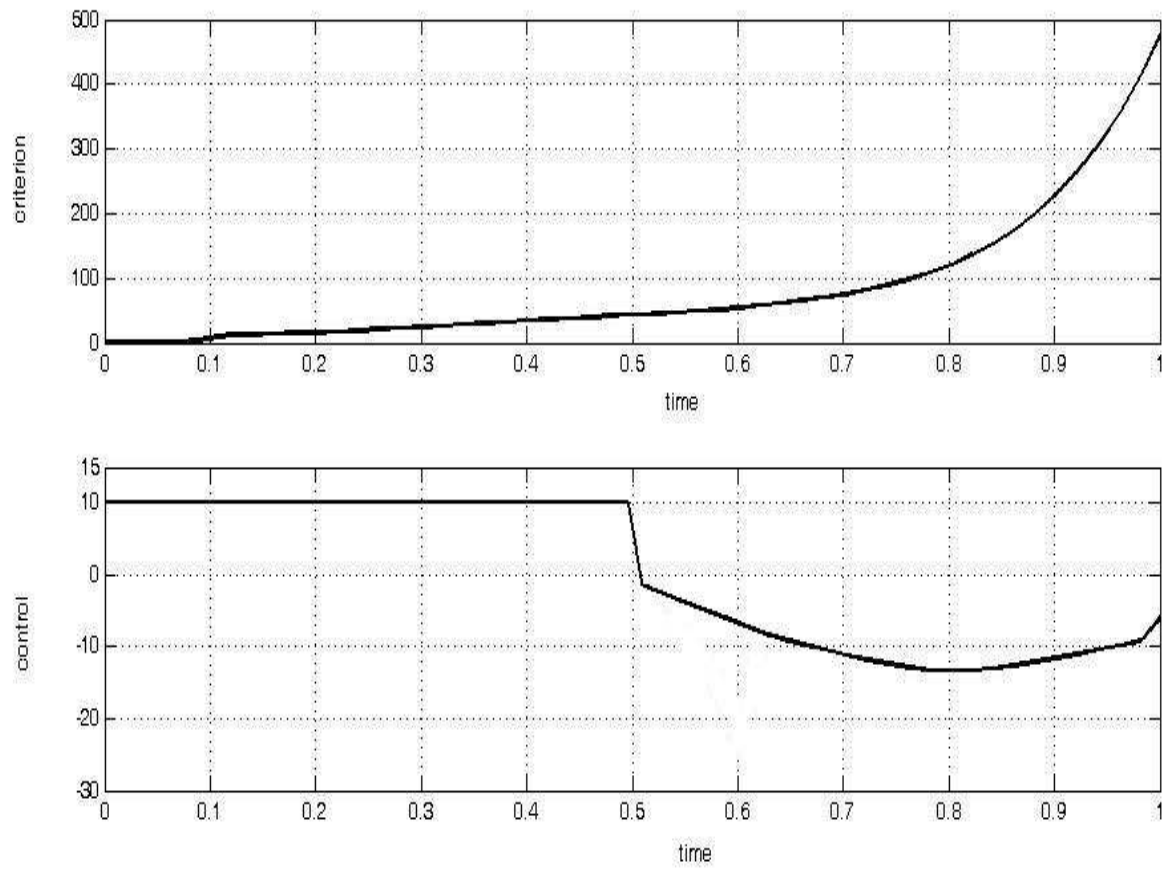


Figura 8.2: Regulador óptimo obtenido para sistemas lineales con múltiples retardos en el estado. Gráfica del criterio (7) $J(t)$ y el control óptimo (11) $u^*(t)$ en el intervalo $[0, 1]$.

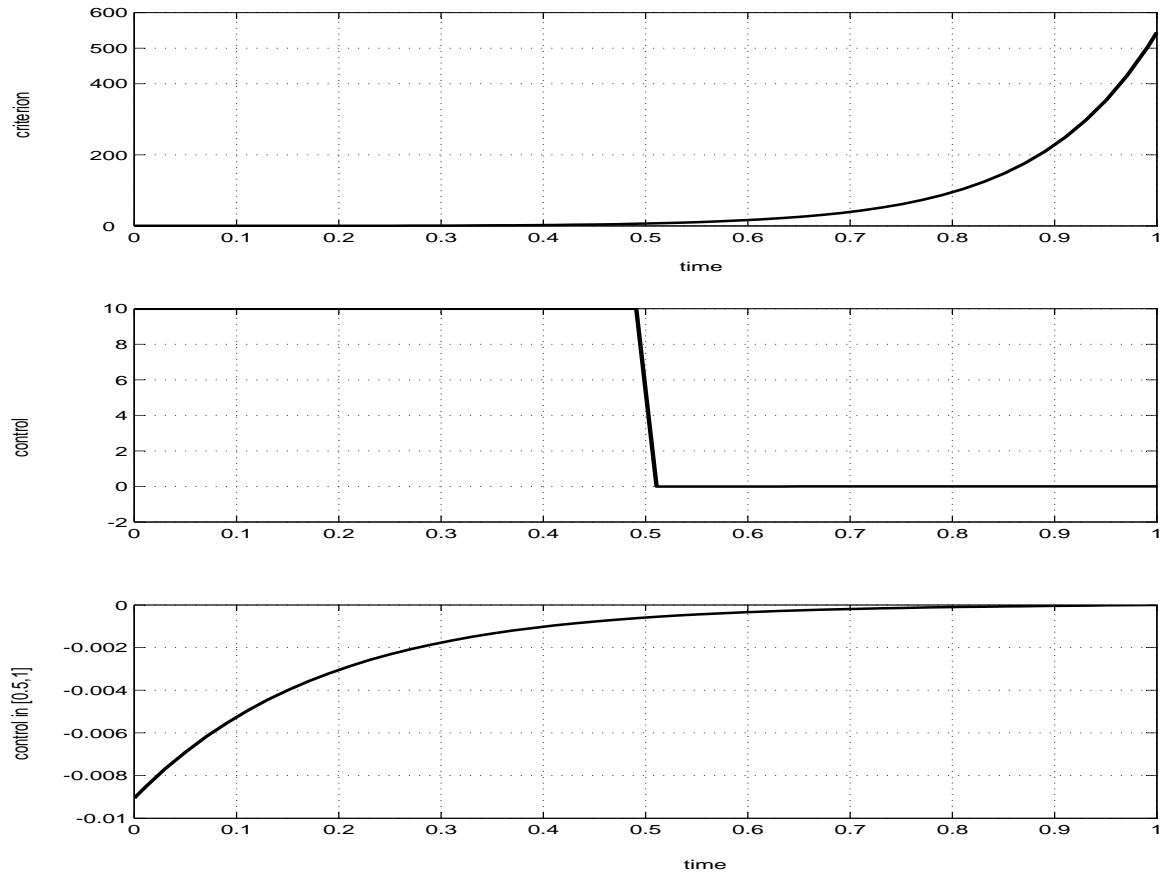


Figura 8.3: Regulador basado en una aproximación de primer orden del sistema con retardo de tiempo original. Gráficas del criterio (7) $J(t)$ y el control (15) $u_1(t)$ en el intervalo $[0, 1]$ y aumentada Gráfica del control $u_1(t)$ en el intervalo $[0.5, 1]$

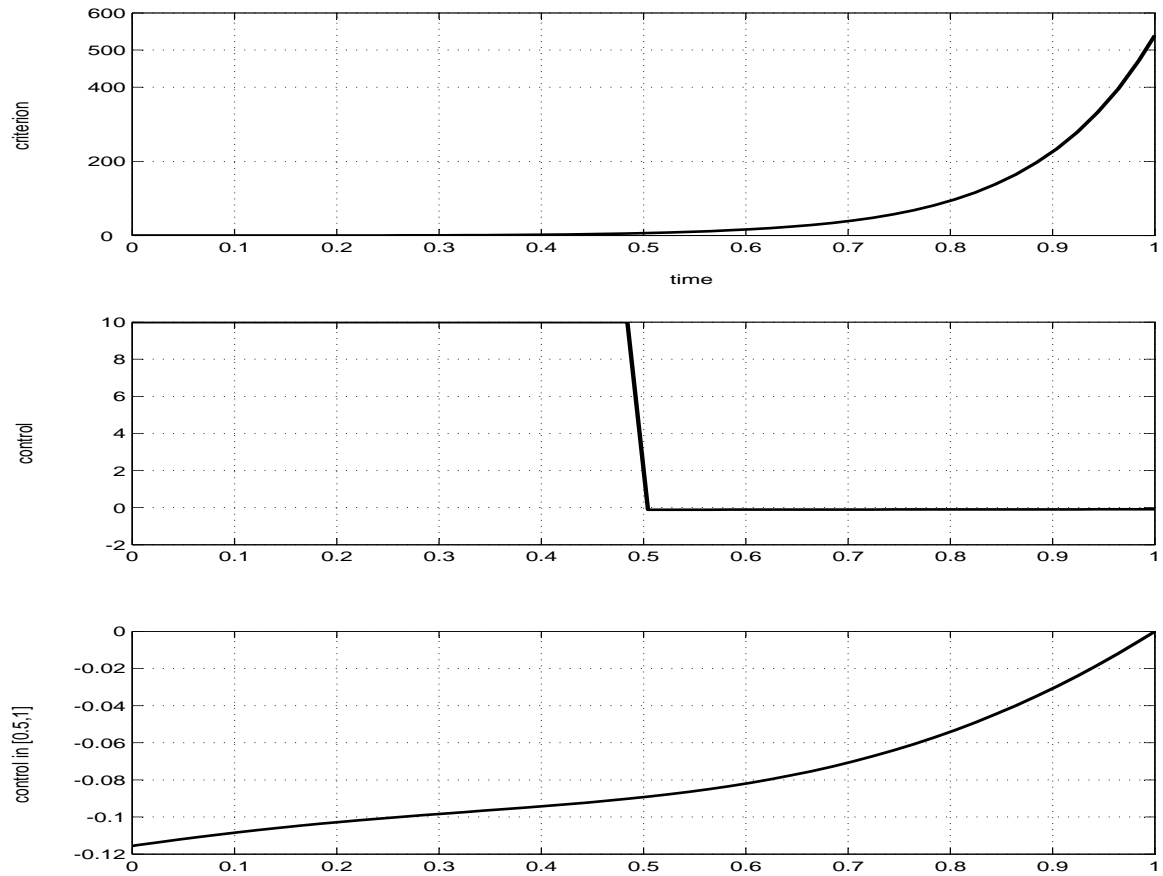


Figura 8.4: Regulador basado en una aproximación de segundo orden del sistema con retardo de tiempo original. Gráfica del criterio (7) $J(t)$ y el control (18) $u_2(t)$ en el intervalo $[0, 0,5]$ y aumentada Gráfica del control (18) $u_2(t)$ en el intervalo $[0,5, 1]$.

Capítulo 9

Conclusiones y Trabajo Futuro

9.1. Conclusiones

La principal contribución de este trabajo es el desarrollo, análisis y verificación a nivel simulación de la solución a problemas de a) filtrado óptimo en sistemas de estado polinomial y lineal con retardo, afectados por perturbaciones de naturaleza estocástica, utilizando las diferenciales de Ito, y b) control óptimo para sistemas lineales con retardos múltiples en el estado y/o en la entrada de control. La solución propuesta a cada problema estudiado en este trabajo fue obtenida considerando condiciones factibles y previamente declaradas.

9.2. Trabajos Futuros

En el trabajo futuro se encuentra el estudio e investigación de los siguientes problemas:

1) Controlador Óptimo en Sistemas Lineales con Retardos Múltiples en el Estado y/o en la Entrada de Control.

2)Controlador Óptimo en Sistemas No Lineales con Retardo en la Entrada de Control.

Bibliografía

- [1] Y. Bar-Shalom. Optimal simultaneous state estimation and parameter identification in linear discrete-time systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 17:308-319, 1972.
- [2] C.R. Rao. Linear Statistical Inference and its Applications . Wiley-Interscience, New York, 1973.
- [3] M. Malek-Zavarei and M. Jamshidi, Time Delay Systems: Analysis, Optimization and Applications, Amsterdam, Holland, 1987.
- [4] S. I. Niculescu, Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach, Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, 2001.
- [5] Y. V. Orlov, Optimal Delay Control Part 1, Automation and Remote Control, vol. 49, no. 11, pp. 1458-1465, nov. 1988.
- [6] Y. V. Orlov, Optimal Delay Control Part 2, Automation and Remote Control, vol. 49, no. 12, pp. 1591-1596, dec. 1988.
- [7] J. P. Richard, Time-Delay Systems: an overview of some recent advances and open problems, Automatica, vol. 39, n. 10, pp. 1667-1694, 2003.

- [8] A. H. Jazwinski, Stochastic Processes and Filtering Theory, Academic Press, New York, USA, 1970.
- [9] H. Kwakernaak and R. Sivan, Linear Optimal Control Systems, Wiley-Intescience, New York, USA, 1972.
- [10] M. S. Mahmoud, Robust Control and Filtering for Time Delay Systems, Marcel Dekker, New York, USA, 2000.
- [11] A. Papoulis, Probabilty, Random Variables and Stochastic Processes, McGraw-Hill, New York, USA, 1965.
- [12] V. S. Pugachev and I. N. Sinitsyn, Stochastic Differential Systems: Analysis and Filtering, World Scientific Publishing Co., Singapore, 1987.
- [13] Kwakernaak H. Optimal filtering in systems with time delay, IEEE Trans. Automat. Contr., 1974; **19**: 169-173.
- [14] Kushner HJ. On differential equations satisfied by conditional probability densities of Markov processes. SIAM J. Control 1964; **12**:106-119.
- [15] Kalman RE, Bucy RS. New results in linear filtering and prediction theory. ASME Trans., Part D (J. of Basic Engineering) 1961; **83**: 95-108.
- [16] Wonham WM. Some applications of stochastic differential equations to nonlinear filtering. SIAM J. Control 1965; **2**: 347-369.
- [17] Benes VE. Exact finite-dimensional filters for certain diffusions with nonlinear drift. Stochastics 1981; **5**: 65-92.

- [18] Yau SST. Finite-dimensional filters with nonlinear drift I: a class of filters including both Kalman-Bucy and Benes filters. *J. Math. Systems, Estimation, and Control* 1994; **4**: 181-203.
- [19] Shi P. Filtering on sampled-data systems with parametric uncertainty, *IEEE Transactions on Automatic Control* 1998; **43**: 1022-1027.
- [20] Mahmoud M, Shi P. Robust Kalman filtering for continuous time-lag systems with Markovian jump parameters. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* 2003; **50**: 98-105.
- [21] Sheng J, Chen T, Shah SL. Optimal filtering for multirate systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* 2005; **52**: 228-232.
- [22] Sheng J. Optimal filtering for multirate systems based on lifted models. *Proc. American Control Conf.* 2005; Portland, OR, USA, 3459-3461.
- [23] Basin MV. On Optimal filtering for polynomial system states. *ASME Trans. J. Dynamic Systems, Measurement, and Control* 2003; **125**: 123-125.
- [24] Basin MV, Alcorta-Garcia MA. Optimal filtering and control for third degree polynomial systems. *Dynamics of Continuous, Discrete, and Impulsive Systems* 2003; **10B**: 663-680.
- [25] L. J. Elliott and V. Krishnamurthy. New finite-dimensional filters for parameter estimation of discrete-time linear Gaussian models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **44**:938-951, 1999.

- [26] L. J. Elliott and V. Krishnamurthy. New finite dimensional filters for estimation of continuous-time linear Gaussian systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **35**:1908-1923, 1997
- [27] T.E. Duncan, P. mandl, and B. Pasik-Duncan. A note on sampling and parameter estimation in linear stochasticsystem. *IEEE Trans. Automat. Control*, **44**:2120-2125, 1999.
- [28] C. D. Charalambous and A. Logothetis. Maximum likelihood parameter estimation from incomplete data via the sensitivity equations: The continuous- time case. *IEEE Trans. Automat. Control*, **45**:928-934, 2000.
- [29] W. X. Zheng. On unbiased parameter estimation of linear systems using noisy measurement. *Cybernetics and Systems*, **34(1)**:59-70, 2003.
- [30] Shi P, Boukas EK, Agarwal RK. Control of Markovian jump discrete-time systems with norm-bounded uncertainty and unknown delay, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1999; **44**: 2139–2144.
- [31] Xu S, Chen T. Robust H_∞ control for uncertain stochastic systems with state delay, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 2002; **47**: 2089–2094.
- [32] Alexander HL. State estimation for distributed systems with sensing delay. *SPIE. Data Structures and Target Classification* 1991; **1470**.
- [33] Kaszkurewicz E, Bhaya A. Discrete-time state estimation with two counters and measurement delay. *Proc. 35th IEEE Conf. on Decision and Control* 1996; 1472-1476.

- [34] Hsiao FH, Pan ST. Robust Kalman filter synthesis for uncertain multiple time-delay stochastic systems. ASME Transactions. J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control 1996; **118**: 803-807.
- [35] Larsen TD, Andersen NA, Ravn O, Poulsen NK. Incorporation of the time-delayed measurements in a discrete-time Kalman filter, Proc. 37th IEEE Conf. on Decision and Control 1998; 3972–3977.
- [36] Basin MV, Rodriguez-Gonzalez JG, Martinez-Zuniga R. Optimal filtering for linear state delay systems, IEEE Trans. Automat. Contr. 2005; **50**: 684-690.
- [37] Basin MV, Martinez-Zuniga R. Optimal linear filtering over observations with multiple delays. International Journal of Robust and Nonlinear Control 2004; **14**: 685-696.
- [38] Basin MV, Alcorta-Garcia MA, Rodriguez-Gonzalez JG. Optimal filtering for linear systems with state and observation delays. International Journal of Robust and Nonlinear Control 2005; **15**: 859–871.
- [39] de Souza CE, Palhares RM, Peres PLD. Robust H_∞ filtering design for uncertain linear systems with multiple time-varying state delays, IEEE Trans. Signal Processing, 2001; **49**: 569–576.
- [40] Xu S., van Dooren PV. Robust H_∞ -filtering for a class of nonlinear systems with state delay and parameter uncertainty, Int. J. Control, 2002; **75**: 766–774.
- [41] Dugard JL, Verriest EI. Stability and Control of Time-Delay Systems, Springer, 1998.
- [42] M. S. Mahmoud, Robust Control and Filtering for Time-Delay Systems, Marcel Dekker, 2000.

- [43] E.-K. Boukas and Z.-K. Liu, *Deterministic and Stochastic Time-Delay Systems*, Birkhauser, Boston, 2002.
- [44] K. Gu and S.-I. Niculescu, Survey on recent results in the stability and control of time-delay systems. *ASME Transactions. J. Dyn. Syst. Measur. Contr.*, **125**, (2003) 158-165.
- [45] V. B. Kolmanovskii and A. D. Myshkis, *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*, Kluwer, New York, 1999.
- [46] V. B. Kolmanovskii and L. E. Shaikhet, *Control of Systems with Aftereffect*, American Mathematical Society, Providence, 1996.
- [47] M. Malek-Zavarei and M. Jamshidi, *Time-Delay Systems: Analysis, Optimization and Applications*, North-Holland, Amsterdam, 1987.
- [48] Niculescu SI. *Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach*. Springer: Heldelberg, 2001.
- [49] Richard JP. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. *Automatica* 2003; **39**: 1667–1694.
- [50] H. Kwakernaak and R. Sivan, *Linear Optimal Control Systems*, Wiley-Interscience, New York, 1972.
- [51] W. H. Fleming and R.W. Rishel, *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Springer, 1975.
- [52] D. H. Eller, J. K. Aggarwal and H. T. Banks, Optimal control of linear time-delay systems, *IEEE Trans. Aut. Contr.*, **14**, (1969) 678-687.

- [53] Y. Alekal, P. Brunovsky, D. H. Chyung and B. E. Lee, The quadratic problem for systems with time delays. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **16**, (1971) 673-687.
- [54] M. C. Delfour, The linear quadratic control problem with delays in space and control variables: a state space approach, *SIAM. J. Contr. Optim.*, **24**, (1986) 835–883.
- [55] K. Uchida, E. Shimemura, T. Kubo and N. Abe, The linear-quadratic optimal control approach to feedback control design for systems with delay, *Automatica*, **24**, (1988) 773-780.
- [56] M. V. Basin, J. G. Rodriguez-Gonzalez and R. Martinez-Zuniga, Optimal control for linear systems with time delay in control input, *Journal of The Franklin Institute*, **341**, (2004) 267-278. Special Issue on the 2003 Franklin Institute Awards.
- [57] M. V. Basin, L. M. Fridman, J.G. Rodriguez-Gonzalez and P. Acosta, Optimal and robust sliding mode control for linear systems with multiple time delays in control input, *Asian Journal of Control*, 5: 557-567, 2003.
- [58] M. V. Basin and J. G. Rodriguez-Gonzalez, A closed-form optimal control for linear systems with equal state and input delays, *Automatica*, **41**, (2005) 915-920.
- [59] M. V. Basin and J. G. Rodriguez-Gonzalez, Optimal control for linear systems with multiple time delays in control input, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **51**, (2006) 91–96.
- [60] M. S. Mahmoud and P. Shi, *Methodologies for Control of Jump Time-Delay Systems*, Springer, 2003.
- [61] L. Mirkin, On the extraction of dead-time controllers and estimators from delay-free parametrizations, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **48**, (2003) 543—553.

- [62] Basin MV, Skliar M. Optimal filtering for partially measured polynomial system states. Proc. American Control Conf. 2005; Portland, OR, USA, 4022-4027.
- [63] Pugachev VS, Sinitsyn IN. Stochastic Systems: Theory and Applications. World Scientific, 2001.
- [64] M. Hazewinkel, S. T. Marcous, and H. J. Sussmann, "Nonexistence of exact finite-dimensional filters for conditional statistics of the cubic sensor problem". Systems and Control Letters, vol. 5, pp. 331-340, 1983.
- [65] Smith OJM. Feedback Control Systems. McGraw Hill: New York, 1958.
- [66] L. Mirkin and N. Raskin, Every stabilizing dead-time controller has an observer–predictor-based structure, Automatica, **39**, (2003) 1747-1754.
- [67] J. M. Dion, Linear Time Delay Systems, Pergamon, London, UK, 1999.
- [68] M. Malek-Zavarei and M. Jamshidi, Time Delay Systems: Analysis, Optimization and Applications, Amsterdam, Holland, 1987.
- [69] A. H. Jazwinski, Stochastic Processes and Filtering Theory, Academic Press, New York, USA, 1970.
- [70] A. Papoulis, Probabilty, Random Variables and Stochastic Processes, McGraw-Hill, New York, USA, 1965.
- [71] V. S. Pugachev and I. N. Sinitsyn, Stochastic Differential Systems: Analysis and Filtering, World Scientific Publishing Co., Singapore, 1987.
- [72] V. S. Pugachev and I. N. Sinitsyn, Stochastic Systems: Theory and Applications, World Scientific Publishing Co., Singapore, 2001.

- [73] R. E. Kalman and R. S. Bucy, New Results in Linear Filtering and Prediction Theory, ASME Transactions, Part D: Journal of Basic Engineering, vol. 83, pp. 95-108, 1961.
- [74] M. S. Mahmoud, Robust Control and Filtering for Time Delay Systems, Marcel Dekker, New York, USA, 2000.
- [75] R. Bellman, Dynamic Programming, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, USA, 1957.
- [76] W. H. Fleming and R. W. Rishel, Deterministic and Stochastic Optimal Control, Springer-Verlag, New York, USA, 1975.
- [77] H. Kwakernaak and R. Sivan, Linear Optimal Control Systems, Wiley-Interscience, New York, USA, 1972.
- [78] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze and E. F. Mishchenko, The Mathematical Theory of Optimal Processes, Wiley and sons, Inc., New York, USA, 1962.
- [79] A. E. Bryson and Y.C. Ho, Applied Optimal Control: Optimization, Estimation and Control, Hemisphere Publishing Co., Washington, DC, USA, 1981.
- [80] Åström KJ. Introduction to Stochastic Control Theory. Academic Press: New York, 1970.
- [81] V. S. Pugachev, Probability Theory and Mathematical Statistics for Engineers. London: Pergamon Press. 1984.
- [82] M. Hazewinkel, S. T. Marcous, and H. J. Sussmann, "Nonexistence of exact finite-dimensional filters for conditional statistics of the cubic sensor problem". Systems and Control Letters, vol. 5, pp. 331-340, 1983.

- [83] A. F. Filippov, Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Sides, Kluwer, 1989.
- [84] J. K. Hale and S. M. Verduyn-Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*. Springer, New York, 1993.
- [85] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze and E. F. Mishchenko, The Mathematical Theory of Optimal Processes, Interscience, New York, 1962.